Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

Fakultät Geoinformation

Internes Manuskript

Geodätische Berechnungen

Lehmann, R.

Geodätische Berechnungen

Dresden, Oktober 2015
FV-05-01.1-3

Herausgeber:
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Fakultät Geoinformation
Friedrich-List-Platz 1
01069 Dresden

Autor:
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann
Professor für Vermessungstechnik und Instrumententechnik an der
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

3. Auflage: Oktober 2015

Als Manuskript gedruckt.

Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

INHALT

0 VORWORT

Dieses Manuskript entstand aus Vorlesungen über Geodätische Berechnungen an der Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden. Da diese Lehrveranstaltung im ersten Semester stattfindet, werden noch keine Methoden der höheren Mathematik benutzt. Das Themenspektrum beschränkt sich deshalb weitgehend auf elementare Berechnungen in der Ebene. Nur im Kapitel 7 kommen einige Methoden der Vektorrechnung zum Einsatz.

Dieses Manuskript benutzt überwiegend die Terminologie und Notation von

GRUBER FJ, JOECKEL R: FORMELSAMMLUNG FÜR DAS VERMESSUNGSWESEN. 16. AKT. AUFLAGE. SPRINGER VIEWEG 2012.

Wir referieren diese Literatur als [G&J x.y.z], wobei x.y.z für den Abschnitt steht.

Bei der Bearbeitung Geodätischer Berechnungen werden **Rechenproben** dringend empfohlen, um Fehler aller Art aufzudecken:

- falsche Lösungswege
- falsch benutzte Formeln
- Tippfehler auf dem Taschenrechner
- Programmierfehler usw.

Dabei sollte man darauf achten, dass eine Rechenprobe möglichst effektiv ist, d.h. möglichst alle denkbaren Fehler aufdeckt. Das ist nur der Fall, wenn man nicht auf Zwischenergebnisse aus der Lösung zurückgreift, die ihrerseits schon falsch sein können. Häufig kann man die Ausgangsgrößen aus den Ergebnissen zurückrechnen. Leider gibt es auch einige Fälle, in denen keine effektive Probe möglich ist.

Die **Winkeleinheit** Gon ist weiterhin im Vermessungswesen verbreitet und in Deutschland eine gesetzliche Einheit im Messwesen, aber keine SI-Einheit. Gon wurde früher Neugrad genannt. Ein Gon ist definiert als der vierhundertste Teil des Vollwinkels, d. h. 1 Vollwinkel = 400 gon. Einige Rechenoperationen sind in Gon übersichtlicher ausführbar, andere nicht. Insbesondere die häufig in der Geometrie auftretenden Winkel 30° und 60° sind in Gon periodische Dezimalbrüche.

Die Lösungen zu den Aufgaben charakterisieren den Lösungsweg mit dem **Taschenrechner**, wobei nur die aufgeschriebenen Stellen mitgeführt werden. Dadurch ergeben sich bei den Proben kleine Abweichungen. Ist dies unerwünscht, weil eine höhere Genauigkeit verlangt ist, müssen mehr Stellen mitgeführt werden.

Für einige Beispiele und Aufgaben sind außerdem vorgefertigte **IN DUBIO PRO GEO** Projekte verfügbar. (IN DUBIO PRO GEO ist eine Website für Geodätische

Berechnungen und Ausgleichungsrechnung). Diese Projekte erreicht man mit den unter den Beispielen und Aufgaben angegebenen Links der Form (XX=zweistellige Nummer der Aufgabe / des Beispiels):

http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispielXX
http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabeXX

Ich danke allen Studierenden der HTW Dresden, die mir halfen, Fehler in diesem Manuskript zu beseitigen. Sollten dennoch Fehler verblieben sein, bitte ich um Mitteilung an r.lehmann@htw-dresden.de

R. Lehmann, Mai 2014

1 EBENE TRIGONOMETRIE

Frischen Sie notfalls Ihre Kenntnisse über ebene Trigonometrie aus der Mathematik auf.

Geodätische Berechnungen werden in der Ebene, auf der Kugeloberfläche, auf der Ellipsoidoberfläche oder im dreidimensionalen Raum ausgeführt. Wir beginnen mit Berechnungen in der Ebene, die selbst für viele nichtebene Berechnungen eine gute Näherung darstellen. Viele räumliche Berechnungen lassen sich außerdem auf ebene Berechnungen zurückführen.

1.1 WINKELFUNKTIONEN

Für geodätische Berechnungen werden die Winkelfunktionen

sin cos tan cot

sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen)

arcsin arccos arctan arccot

benötigt. Auf Taschenrechnern und in manchen Literaturquellen verbreitete Schreibweisen sind

$\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ $\tan^{-1}$

⚠ *Dies ist nicht dasselbe wie 1/sin usw.! Gemeint sind die Umkehrfunktionen.*

Winkelfunktionen müssen Sie ineinander umrechnen können. Z.B. ist

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \cos(100\text{gon}-\alpha)$$

und weitere Beziehungen, ↗ [G&J 2.5.1] oder
http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrische_Funktion#Beziehungen_zwischen_den_Funktionen

⚠ *Die Arkusfunktionen sind nicht eindeutig. Es gibt zu jedem Argument im Intervall [0,400gon] einen Hauptwert und einen Nebenwert. Der Taschenrechner liefert jeweils nur den Hauptwert. Bei vielen Rechnungen kann aber vielmehr der Nebenwert gefragt sein.*

Beispiel 1: Aus x = 0,230697 erhält man die Haupt- und Nebenwerte

	Bogenmaß		Gon	
	Hauptwert	Nebenwert	Hauptwert	Nebenwert
arcsin(x)	0,232794	2,908799	14,8201	185,1799
arccos(x)	1,338002	4,945183	85,1799	314,8201
arctan(x)	0,226730	3,368323	14,4341	214,4341
arccot(x)	1,344066	4,485659	85,5659	285,5659

Aufgabe 1: Überzeugen Sie sich, dass sowohl sin(14,8201gon) als auch sin(185,1799gon) den Wert 0,230697 ergeben. Wiederholen Sie dies mit den anderen Werten.

1.2 BERECHNUNG SCHIEFWINKLIGER EBENER DREIECKE

Zu den grundlegenden Beziehungen im schiefwinkligen Dreieck gehören

Sinussatz	Kosinussatz	Tangenssatz
Projektionssatz	Halbwinkelsätze	Mollweidesche Formeln

[G&J 2.5.2] http://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie

Für elementare Dreiecksberechnungen mit Winkeln und Seiten sind der Sinussatz und der Kosinussatz ausreichend. Außerdem kann der Projektionssatz günstig als Probe verwendet werden. Er verarbeitet alle Seiten und zwei Winkel. Wenn noch die Innenwinkelsumme stimmt, kann das Dreieck als ausreichend verprobt gelten.

Bei einem ebenen schiefwinkligen Dreieck müssen drei Stücke gegeben sein, damit sich die anderen Stücke daraus ergeben. Nicht immer jedoch ist die Berechnung eindeutig. Die Fälle, in denen Winkel und/oder Seitenlängen ein Dreieck eindeutig definieren, werden über die Kongruenzsätze erfasst. Es gibt folgende Kongruenzsätze:

SSS-Satz: Zwei Dreiecke, die in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen, sind kongruent.

SWS-Satz: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

WSW-Satz: Zwei Dreiecke, die in einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.

WWS-Satz: Zwei Dreiecke, die in einer Seitenlänge, dem gegenüberliegenden und einem dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.

SSW-Satz: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt, sind kongruent.

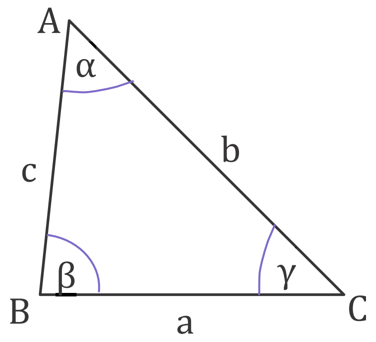


Abbildung 1: Das schiefwinklige Dreieck

Aus diesen Kongruenzsätzen lassen sich fünf elementare Fälle der Dreiecksberechnung ableiten (zu den Bezeichnungen ↗ Abbildung 1):

Tabelle 1: Berechnung schiefwinkliger ebener Dreiecke

Kongruenz-satz	**SSS**	**SWS**	**WSW**	**WWS**	**SSW**
gegeben sind z.B.	a,b,c	a,γ,b	α,c,β	α,β,a	a,b,α
eindeutig, falls	$2\cdot\max(a,b,c) < a+b+c$	$0<\gamma<$ 200gon	$0 < \alpha+\beta <$ 200gon	$0 < \alpha+\beta <$ 200gon	$0 < \alpha <$ 200gon, $b<a$
Empfohlene Berechnung	α,β,γ aus Kosinussatz	(1) c aus Kosinussatz (2) α,β aus Kosinussatz	(1) $\gamma = 200$ gon- α-β (2) a,b aus Sinussatz	(1) $\gamma = 200$ gon-α-β (2) b,c aus Sinussatz	(1) β aus Sinussatz (2) $\gamma = 200$ gon-α-β (3) c aus Sinussatz
Empfohlene Rechenprobe	$\alpha+\beta+\gamma =$ 200gon	$\alpha+\beta+\gamma =$ 200gon	c aus Pro-jektionssatz	a aus Pro-jektionssatz	a aus Pro-jektionssatz

⚠ *In der letzte Spalte der Tabelle 1 verdient die Bedingung $b<a$ besondere Beachtung. Der kleineren Seite im Dreieck liegt auch der kleinere Winkel gegenüber. Damit ist $\beta<\alpha$ und somit β auf jeden Fall ein spitzer Winkel. Wird $\beta = \arcsin(b \sin(\alpha)/a)$ berechnet, so kommt für β nur der Hauptwert in Betracht. Deshalb ist diese Berechnung eindeutig. Andernfalls könnte eine zweite Lösung aus dem Nebenwert resultieren. Es könnte auch gar keine Lösung möglich sein, nämlich wenn $a<b \sin(\alpha)$ ist, wonach der Arkussinus keine Lösung liefert.*

Beispiel 2: Das Dreieck in Abbildung 2 definiert durch *a*,*b*,α ist zweideutig, weil a<b gilt.

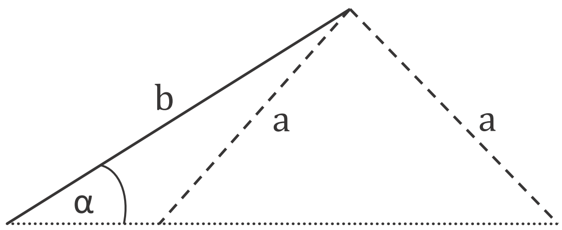


Abbildung 2 (zu Beispiel 2): Der gegebene Winkel α liegt der kürzeren Seite a gegenüber.

Aufgabe 2: Überzeugen Sie sich möglichst einfach, dass folgende drei Seitenlängen und drei Winkel zu **einem** Dreieck gehören:

a = 14,02 m	b = 17,11 m	c = 23,06 m
α = 41,413 gon	β = 52,947 gon	γ = 105,640 gon

Wenden Sie dazu einen Projektionssatz an, z.B.

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

und überprüfen Sie die Winkelsumme.

Greifen Sie danach je drei beliebige Werte heraus und berechnen Sie daraus jeweils einen vierten Wert. Wieviel Kombinationen sind möglich? Wieviel sind einige zweideutig?

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe02

1.3 BERECHNUNG SCHIEFWINKLIGER EBENER VIERECKE

Um Vierecke eindeutig berechnen zu können, sind meist 5 Stücke nötig (Seiten, Diagonalen, Winkel). In einigen Fällen kommt es ähnlich wie bei Dreiecken zu Mehrdeutigkeiten. Vierecke können entlang einer Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegt werden. Danach ist häufig die Berechnung in beiden Dreiecken nacheinander möglich.

Beispiel 3: Berechnen Sie aus den Messwerten in Abbildung 3 die fehlende Diagonale AC.

⚠ *Ohne die Abbildung 3 wäre noch eine andere Lösung möglich, bei der das Viereck konkav ist und so die Diagonale BD außerhalb des Vierecks verläuft.*

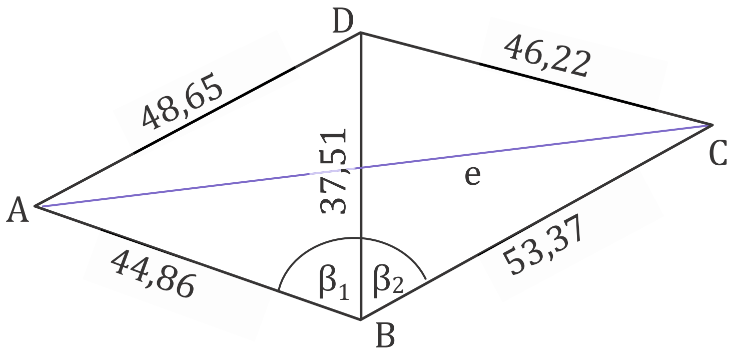


Abbildung 3 (zu Beispiel 3): Die Seitenlängen sind in Meter angegeben.

Lösung: Mit dem Kosinussatz berechnet man die Winkel β_1 und β_2:

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{44{,}86^2 + 37{,}51^2 - 48{,}65^2}{2 \cdot 44{,}86 \cdot 37{,}51}\right) = 79{,}749 \text{ gon}$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{37{,}51^2 + 53{,}37^2 - 46{,}22^2}{2 \cdot 37{,}51 \cdot 53{,}37}\right) = 64{,}494 \text{ gon}$$

Erneut mit dem Kosinussatz berechnet man die Diagonale AC:

$$e^2 = 44{,}86^2\text{m}^2 + 53{,}37^2\text{m}^2 - 2 \cdot 44{,}86\text{m} \cdot 53{,}37\text{m} \cdot \cos(79{,}749\text{gon} + 64{,}494\text{gon})$$

und somit e = 89,03 m.

Probe: Am effektivsten berechnet man dasselbe über die Winkel bei D. Diese betragen 67,938 gon und 87,154 gon.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel03

Aufgabe 3: Berechnen Sie in Abbildung 4 die Seite CD mit Rechenprobe.

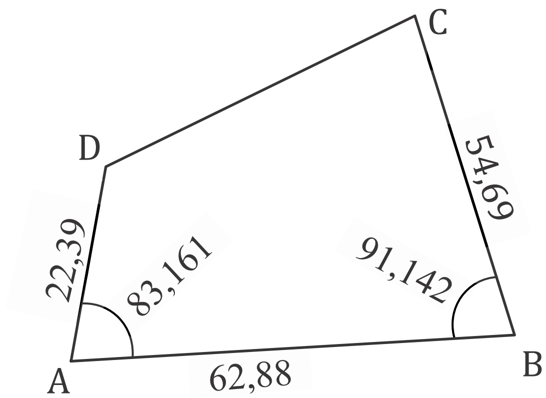


Abbildung 4: (zu Aufgabe 3) Die Winkel sind in Gon angegeben, die Strecken in Meter.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe03

2 EBENE KOORDINATENRECHNUNG

2.1 KARTESISCHE UND POLARKOORDINATEN

In der Geodäsie wird häufig mit kartesischen Koordinatensystemen gearbeitet. Anders als in der Mathematik benutzt man traditionell ein linkshändiges System, bei dem die x-Achse nach oben (auf der Karte nach Norden) und die y-Achse nach links (auf der Karte nach Osten) weist. Dem Koordinatenursprung O, wenn er logisch in der Mitte des betrachteten Gebiets liegt, werden häufig nicht die Koordinaten (0;0) zugeordnet, sondern größere runde Zahlen, so dass sich alle relevanten Koordinaten positiv ergeben. In Abbildung 5 kommen dem Punkt P die kartesischen Koordinaten x_P und y_P zu.

Die Schreibweise der Koordinaten ist leider äußerst uneinheitlich. Wir folgen der Schreibweise aus [G&J] und geben y vor x an: (y_P; x_P).

Eine Verwechslung der Koordinaten ist leider eine häufige Fehlerquelle.

[G&J 3.2.5] http://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Koordinatensystem

Neben den kartesischen Koordinaten verwendet man häufig Polarkoordinaten mit dem Koordinatenursprung O als Pol und der x-Achse als Nullrichtung. Diese werden als Richtung (oder Polarwinkel) r und Strecke e bezeichnet. Die Richtung zählt rechtsläufig (d.h. im Uhrzeigersinn) von 0 gon (Richtung der x-Achse) über 100 gon (Richtung der y-Achse) bis 400 gon (wieder Richtung der x-Achse). Negative Richtungen oder Richtungen größer oder gleich 400 gon werden vermieden. In Abbildung 5 kommen dem Punkt P die Polarkoordinaten r_P und e_P zu. Ist die x-Achse in irgendeiner Weise nach Norden orientiert, spricht man vom Richtungswinkel (auch Azimutwinkel) und bezeichnet diesen mit t. Es ist üblich, Richtungswinkel im Intervall [0…400]gon anzugeben.

[G&J 3.2.6] http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

Polarkoordinaten können sich ebenso wie auf den Koordinatenursprung auch auf einen anderen Pol beziehen. In Abbildung 6 beziehen sich die Polarkoordinaten t_{PQ} und e_{PQ} von Q auf den Pol P. Man bezeichnet diese als Richtungswinkel und Strecke von P nach Q. Offenbar gilt:

$$e_{QP} = e_{PQ} \qquad \text{und} \qquad t_{QP} = t_{PQ} \pm 200 \text{ gon}$$

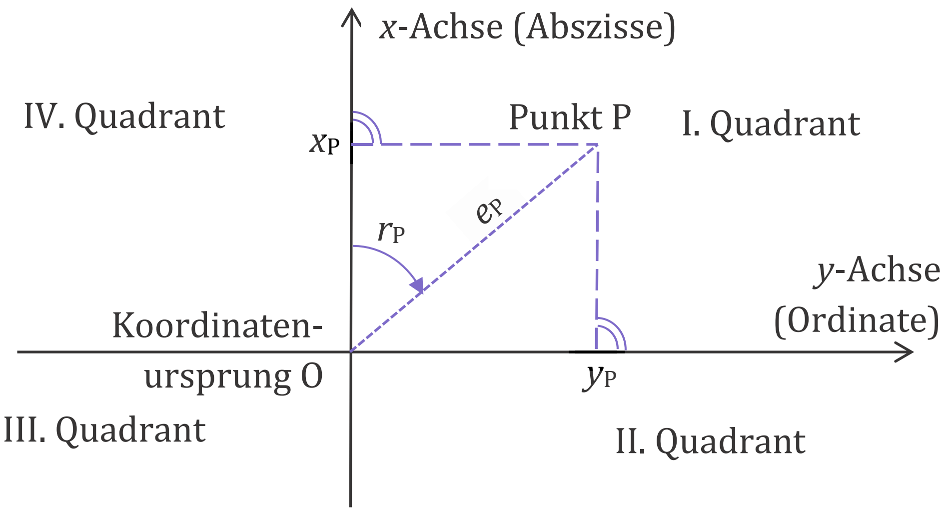


Abbildung 5: Das geodätische ebene Koordinatensystem

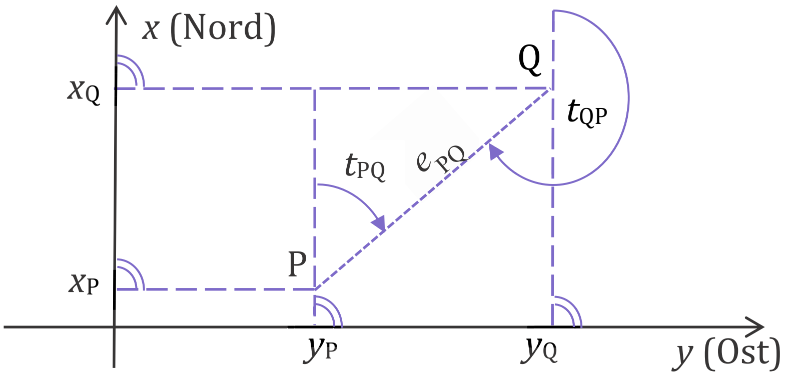


Abbildung 6: Richtungswinkel und Strecke

2.2 ERSTE GEODÄTISCHE GRUNDAUFGABE

Zunächst sollen aus Polarkoordinaten kartesische Koordinaten berechnet werden. Diese Aufgabe nennt man Erste Geodätische Grundaufgabe in der Ebene. In Abbildung 5 und Abbildung 6 liest man unmittelbar ab [G&J 4.1.2]:

$$y_P = y_O + e_P \cdot \sin r_P \quad \text{bzw.} \quad y_Q = y_P + e_{PQ} \cdot \sin t_{PQ}$$

$$x_P = x_O + e_P \cdot \cos r_P \qquad x_Q = x_P + e_{PQ} \cdot \cos t_{PQ}$$

Die Koordinaten des Ursprungs (y_O; x_O) müssen dabei nicht zwangsläufig Null sein (↗ Abschnitt 2.1). Man nennt diese Rechenoperation auch **Polares Anhängen**.

Beispiel 4: Gegeben sind in einem nach Norden orientierten Koordinatensystem die kartesischen Koordinaten P(y_P = 16,10 m ; x_P = 23,06 m) und die Polarkoordinaten t_{PQ} = 214,199 gon und e_{PQ} = 17,11 m. Die kartesischen Koordinaten von Q sollen ermittelt werden.

Lösung: Es liegt eine Erste Geodätische Grundaufgabe vor.

$$y_Q = 16{,}10\text{m} + 17{,}11\text{m} \cdot \sin(214{,}199\text{ gon}) = \underline{12{,}32\text{ m}}$$
$$x_Q = 23{,}06\text{m} + 17{,}11\text{m} \cdot \cos(214{,}199\text{ gon}) = \underline{6{,}37\text{ m}}$$

Probe: wie Beispiel 5.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel04

2.3 ZWEITE GEODÄTISCHE GRUNDAUFGABE

Die umgekehrte Koordinatenumwandlung nennt man Zweite Geodätische Grundaufgabe in der Ebene. Sie ist etwas weniger einfach, weil hier für die Richtung die Quadrantenbeziehungen des Arkustangens beachtet werden müssen [G&J 4.1.2]:

$$r_P = \arctan\frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} \qquad \text{bzw.} \qquad t_{PQ} = \arctan\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

$$e_P = \sqrt{(y_P - y_O)^2 + (x_P - x_O)^2} \qquad e_{PQ} = \sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}$$

⚠ *Ein wissenschaftlicher Taschenrechner bietet Möglichkeiten zur Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten. Diese sollten Sie unbedingt konsequent nutzen. Nicht nur geht dies wesentlich schneller und bequemer, sondern Sie vermeiden den sonst häufigen Fehler, die Richtung im falschen Quadranten zu erhalten. In Programmierumgebungen finden Sie häufig die Funktion arctan2, z.B. in Tabellenkalkulationsprogrammen. Diese ist anzuwenden als* $t_{PQ} = \arctan2(x_Q\text{-}x_P; y_Q\text{-}y_P)$ *und liefert den Winkel im Bogenmaß im halboffenen Intervall (-π ,π], so dass dieser ggf. noch in die gewünschte Winkelmaßeinheit umzurechnen ist.*

Beispiel 5: Gegeben sind in einem nach Norden orientierten Koordinatensystem die kartesischen Koordinaten P(y_P = 16,10 m ; x_P = 23,06 m) und Q(y_Q = 12,32 m ; x_Q = 6,37 m). Richtungswinkel t_{PQ} und Strecke e_{PQ} sollen ermittelt werden.

Lösung: Es liegt eine Zweite Geodätische Grundaufgabe vor.

$$t_{PQ} = \arctan\frac{12{,}32 - 16{,}10}{6{,}37 - 23{,}06} = \underline{214{,}18\text{ gon}}$$

$$e_{PQ} = \sqrt{(12{,}32 - 16{,}10)^2 + (6{,}37 - 23{,}06)^2}\text{ m} = \underline{17{,}11\text{ m}}$$

Die Berechnung von t_{PQ} in einem Tabellenkalkulationsprogramm o.ä. könnte wie folgt lauten:

grad(arctan2(6,37–23,06;12,32–16,10))/0,9+400 = 214,18

⚠ *Wenn Sie hier die Funktion arctan verwenden würden, erhielten Sie zunächst den falschen Wert 14,18 gon für den Richtungswinkel und müssten jetzt noch die Quadrantenregel beachten: Zähler und Nenner negativ bedeutet III. Quadrant [G&J 2.5.1].*

Probe: wie Beispiel 4.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel05

Aufgabe 4: a) Berechnen Sie die Richtungswinkel und Strecken der Seiten des Dreiecks ABC mit den folgenden Koordinaten:

Punkt	A	B	C
y [m]	432,29	597,65	654,77
x [m]	337,45	218,08	371,58

b) Drehen Sie dieses Dreieck im Punkt A um 50,000 gon und berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der beiden neuen Eckpunkte B‘ und C‘. Hinweis: Der Drehwinkel ist rechtsläufig (im Uhrzeigersinn) definiert.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe04_09
(B‘ und C‘ im Universalrechner berechnen lassen)

3 FLÄCHENBERECHNUNG UND FLÄCHENTEILUNG

3.1 FLÄCHENBERECHNUNG AUS MAẞZAHLEN

Zu den meisten berechenbaren Kombinationen von gegebenen Dreiecksgrößen (Maßzahlen) gibt es Formeln zur Berechnung des Dreiecksflächeninhaltes F [G&J 4.2.1]:

Kongruenzsatz	Gegeben	Formel
SSS	a,b,c	$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
SWS	a,γ,b	$F = \frac{1}{2}ab\ \sin\gamma$
WSW	α,c,β	$F = \frac{c^2}{2(\cot\alpha + \cot\beta)}$
WWS	α,β,a	$F = \frac{a^2}{2(\cot\beta - \cot(\alpha+\beta))}$

Die SSS-Formel heißt Heronsche Formel. Die Größe s in dieser Formel bezeichnet den halben Dreiecksumfang: $s = ½(a+b+c)$.
http://de.wikipedia.org/wiki/Heronsche_Formel

Eine entsprechende Formel für SSW könnte man aufstellen, diese ist aber unhandlich. Vielmehr würde man in diesem Fall zunächst mit dem Sinussatz einen weiteren Winkel berechnen und dann z.B. die WWS-Formel anwenden. Die Flächenberechnung liefert auch hier nicht immer ein eindeutiges Ergebnis.

Aufgabe 5: Betrachten Sie das Dreieck aus Aufgabe 2. Greifen Sie je drei beliebige gegebene Größen heraus und berechnen Sie daraus jeweils den Dreiecksflächeninhalt. Beachten Sie, dass bei einigen Kombinationen zwei Ergebnisse möglich sind.

Polygone mit mehr als drei Ecken zerlegt man am besten in Dreiecke, z.B. entlang ausgewählter Diagonalen.

Aufgabe 6: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks aus Aufgabe 3 und zur Probe noch auf eine zweite unabhängige Weise.

Von den aus der Geometrie bekannten elementaren Formeln zur Flächenberechnung erwähnen wir besonders das Trapez mit den parallelen Seiten a,c und der Höhe h. Sein Flächeninhalt beträgt

$$F = ½(a+c) \cdot h$$

Aufgabe 7: Geben Sie eine allgemeingültige Formel an, die die Fläche eines beliebigen Trapezes aus den vier Seitenlängen *a,b,c,d* berechnet. Testen Sie die Formel anhand des Trapezes (*a* und *c* parallel)

a = 16,10 m; b = 17,11 m; c = 23,06 m; d = 14,02 m; F = 266,17 m^2.

3.2 FLÄCHENBERECHNUNG AUS KOORDINATEN

Noch häufiger als aus Maßzahlen werden Flächen aus Koordinaten der Eckpunkte des Umringpolygons berechnet, sowohl aus kartesischen wie aus polaren Koordinaten [G&J 4.2.2].

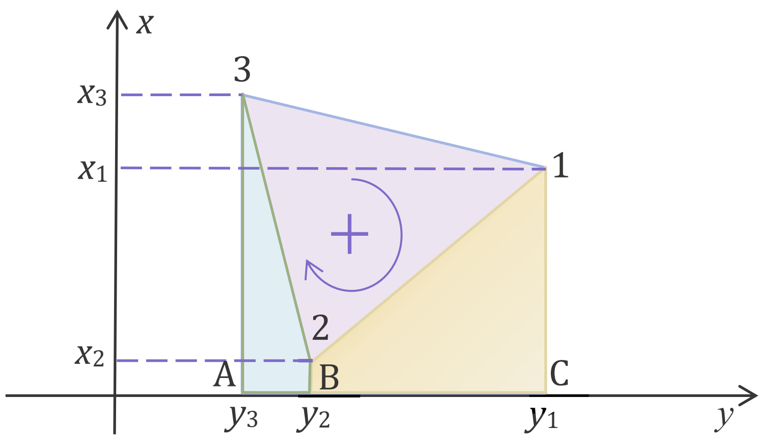


Abbildung 7: Gaußsche Trapezformel

Den Flächeninhalt des Dreieckes 321 in Abbildung 7 kann man als Differenz dreier Trapezflächen gewinnen:

$$F_{321} = F_{AC13} - F_{AB23} - F_{BC12}$$

Die Trapezflächeninhalte ergeben sich leicht aus den kartesischen Koordinaten der Eckpunkte:

$$F_{AC13} = ½(x_1+x_3)\cdot(y_1-y_3),\ F_{AB23} = ½(x_2+x_3)\cdot(y_2-y_3),\ F_{BC12} = ½(x_1+x_2)\cdot(y_1-y_2)$$

Man erkennt, dass man diese Berechnung offenbar auf allgemeine geschlossene Polygone mit *n* Ecken verallgemeinern kann und gelangt zu einer Variante der Gaußschen Flächenformeln, einer sogenannten **Trapezformel**:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})\cdot(y_{i+1} - y_i)$$

wobei $x_{n+1} := x_1$ und $y_{n+1} := y_1$ gesetzt werden.

Bemerkenswert ist, dass die Trapeze unterhalb von Seiten, die entgegen der y-Achse durchlaufen werden, automatisch subtrahiert werden, weil die größere y-Koordinate von der kleineren abgezogen wird. Es ist also keinerlei Fallunterscheidung notwendig.

Eine gleichartige Formel ergibt sich, wenn man die Trapez-Zerlegung entlang der x-Achse vornimmt:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+1})$$

Schließlich ergibt sich noch die Möglichkeit einer Zerlegung in Dreiecke statt Trapeze. Man gelangt dann zur zweiten Variante der Gaußschen Flächenformeln, einer sogenannten **Dreiecksformel**:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1})$$

wobei $y_0 := y_n$ und $y_{n+1} := y_1$ gesetzt wird. Eine gleichartige Formel ergibt sich, wenn man die Dreieck-Zerlegung entlang der x-Achse vornimmt:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})$$

wobei $x_0 := x_n$ und $x_{n+1} := x_1$ gesetzt wird. Auch hier ist wieder keinerlei Fallunterscheidung notwendig.

Bei allen Trapez- und Dreiecksformeln gilt: Die Nummerierung der Eckpunkte 1,2,…,n muss im Uhrzeigersinn (rechtsläufig) erfolgen, sonst wird der Flächeninhalt F betragsrichtig, aber negativ erhalten.

⚠ *Die Eckpunkte von Polygonen werden häufig auch in der Geodäsie wie in der Mathematik gegen den Uhrzeigersinn (linksläufig) nummeriert oder bezeichnet.*

Es wird empfohlen, eine Trapezformel zur Berechnung der Fläche und eine Dreiecksformel zur Probe zu verwenden oder umgekehrt.

Aufgabe 8: Erzeugen Sie die Dreiecksformeln aus den Trapezformeln durch Auflösen der Klammern und Neuzusammenfassen der Terme.

Beispiel 6: Wir berechnen die Fläche in Abbildung 8 nach den verschiedenen Gaußschen Flächenformeln:

Trapezformel 1: 2F = (1+4)·(2-6)+(4+8)·(5-2)+(8+5)·(9-5)+(5+1)·(6-9)
= -20+36+52-18 = +50

Trapezformel 2: 2F = (1-4)·(6+2)+(4-8)·(2+5)+(8-5)·(5+9)+(5-1)·(9+6)
= -24-28+42+60 = +50

Dreiecksformel 1: 2F = 1·(2-9)+4·(5-6)+8·(9-2)+5·(6-5)
= -7-4+56+5 = +50

Dreiecksformel 2: 2F = 6·(5-4)+2·(1-8)+5·(4-5)+9·(8-1)
= 6-14-5+63 = +50

Es ergibt sich überstimmend F = 25 ✓, der korrekte Wert, denn die berechnete Fläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel06

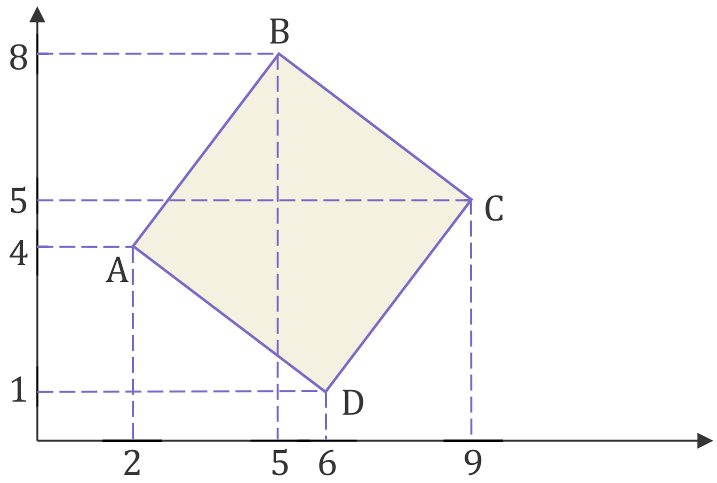


Abbildung 8: (zu Beispiel 6)

Auch aus Polarkoordinaten der Eckpunkte lässt sich der Flächeninhalt eines Polygons berechnen. Den Flächeninhalt des Dreiecks 321 in Abbildung 9 kann man als Differenz dreier Dreiecksflächen gewinnen:

$$F_{321} = F_{013} + F_{021} - F_{023}$$

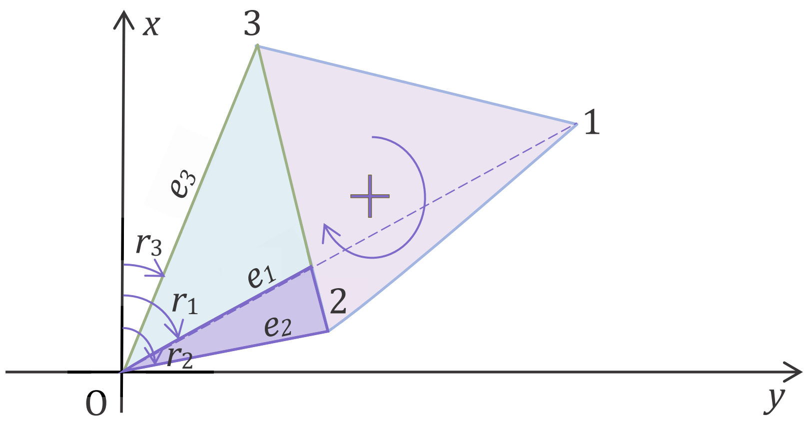


Abbildung 9: Fläche aus Polarkoordinaten

Die Dreiecksflächeninhalte ergeben sich leicht aus den Polarkoordinaten der Eckpunkte:

$$F_{013} = ½·e_1·e_3·\sin(r_1\text{-}r_3),\ F_{021} = ½·e_2·e_1·\sin(r_2\text{-}r_1),\ F_{023} = ½·e_2·e_3·\sin(r_2\text{-}r_3)$$

Man erkennt, dass man diese Berechnung offenbar auf allgemeine geschlossene Polygone mit n Ecken verallgemeinern kann und gelangt zu der Variante der Gaußschen Flächenformeln für Polarkoordinaten:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot e_{i+1} \cdot \sin(r_{i+1} - r_i)$$

wobei $e_{n+1} := e_1$ und $r_{n+1} := r_1$ gesetzt wird. Auch hier ist wieder keinerlei Fallunterscheidung notwendig. Die Nummerierung der Eckpunkte 1,2,…,n muss wieder im Uhrzeigersinn (rechtsläufig) erfolgen, sonst wird der Flächeninhalt F betragsrichtig, aber negativ erhalten.

Beispiel 7: Die Fläche aus Abbildung 8 soll nach Polarkoordinaten berechnet werden. Diese Koordinaten lauten (↗ Abschnitt 2.3):

	A	B	C	D
e	4,472	9,434	10,296	6,083
r [gon]	29,517	35,562	67,717	89,486

Lösung: 2F = 4,472·9,434·sin(35,562gon-29,517gon)+ 9,434·10,296·sin(67,717gon-35,562gon)+10,296·6,083·sin(89,486gon-67,717gon)+ 6,083·4,472·sin(29,517gon-89,486gon) = 4,000+47,000+21,00-22,000 = 50,000

Es ergibt sich erneut F = <u>25</u>.

Probe: Es empfiehlt sich eine Umrechnung in kartesische Koordinaten und die Benutzung einer Trapez- oder Dreiecksformel.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel07
(danach als Koordinatenliste übernehmen und dieses ebene Polygon berechnen)

Aufgabe 9: Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke ABC und AB'C' aus Aufgabe 4 sowohl über die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte und je eine Trapez- und Dreiecksformel als auch über die Polarkoordinaten der Eckpunkte bezogen auf den Pol A. Dazu können Sie auf die Ergebnisse aus Aufgabe 4 zurückgreifen.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe04_09

3.3 ABSTECKUNG UND TEILUNG GEGEBENER DREIECKSFLÄCHEN

Bei der umgekehrten Aufgabe soll aus einem gegebenen Dreiecksflächeninhalt F und zwei weiteren Größen des Dreiecks eine dritte berechnet werden, um diese Fläche z.B. in der Örtlichkeit abzustecken. Diese Aufgabe kann man dadurch lösen, dass eine passende Formel für den Flächeninhalt nach der gesuchten Größe umgestellt wird.

Beispiel 8: Bestimmen Sie in Abbildung 10 die Länge der Seite c.

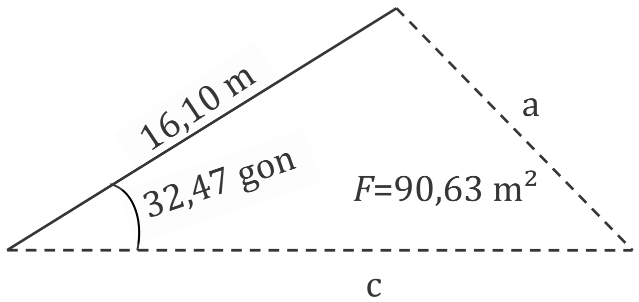


Abbildung 10 (zu Beispiel 8)

Lösung: Durch Einsetzen in die SWS-Flächenformel ergibt sich

$$90{,}63\ \mathrm{m}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot 16{,}10\ \mathrm{m} \cdot \sin(32{,}47\ \mathrm{gon})$$

und somit c = <u>23,06 m</u>.

Probe: Eine gute Probe sollte möglichst unabhängig von der bisherigen Rechnung sein. Das wäre insbesondere nicht über eine Höhe im Dreieck gegeben. Die Rechnung würde wieder auf die SWS-Formel führen. Deshalb berechnen wir besser die Seite a mittels Kosinussatz:

$$a^2 = 16{,}10^2\ \mathrm{m}^2 + 23{,}06^2\ \mathrm{m}^2 - 2 \cdot 16{,}10\ \mathrm{m} \cdot 23{,}06\ \mathrm{m} \cdot \cos(32{,}47\ \mathrm{gon})$$

und somit a = 11,96 m. Daraus berechnen wir den halben Umfang s = 25,56 m und über die Heronsche Formel F = 90,67 m² ✓.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel08

Teilung von Flächen bedeutet Absteckung einer der beiden Teilflächen. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, wie die Teilungsgerade verlaufen kann, z.B.

- durch einen Eckpunkt der Fläche oder einen anderen gegebenen Punkt,
- parallel zu einer Seite der zu teilenden Fläche (Parallelteilung) oder
- senkrecht zu einer Seite der zu teilenden Fläche (Senkrechtteilung).

Aufgabe 10: Stecken Sie die Punkte P und Q in Abbildung 11 so ab, dass die Fläche APQ halb so groß ist wie die Fläche ABC und PQ parallel zu BC ist. Die Umringmaße von ABC sind gegeben. Halbieren Sie die Fläche ABC ein weiteres Mal entlang einer Teilungsgerade BR. Wo muss der Punkt R auf AC liegen? Konsultieren Sie bei Bedarf auch [G&J 4.3.1]. Hinweis: Bei dieser Aufgabe müssen Sie nur auf sehr elementare geometrische Grundkenntnisse zurückgreifen.

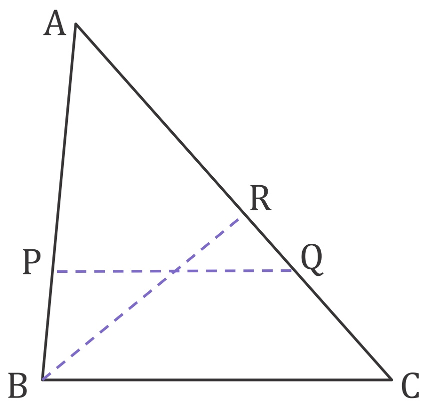


Abbildung 11: (zu Aufgabe 10)

3.4 ABSTECKUNG UND TEILUNG GEGEBENER VIERECKSFLÄCHEN

Prinzipiell kann man Vierecke oder andere Vielecke in Dreiecke zu zerlegen. Meist ist dann nur noch ein Restdreieck abzustecken oder zu teilen. Hierauf wurde im letzten Abschnitt schon eingegangen.

Beispiel 9: Berechnen Sie für das Viereck in Abbildung 12 die Seitenlängen *c* und *b*.

Lösung: Zunächst berechnet man Dreieck ABD: Man erhält

$$F_{ABD} = ½\cdot 22{,}39\text{ m} \cdot 62{,}88\text{ m} \cdot \sin(83{,}161\text{ gon}) = 679{,}46\text{ m}^2$$

so dass die Restfläche F_{BCD} = 722,54 m^2 beträgt. Über den Kosinussatz erhält man BD = 60,984 m. Der Innenwinkel bei B wird durch die Diagonale BD zerlegt in 23,061 gon (besser mit Kosinussatz berechnen) und 68,081 gon. Durch Einsetzen in die SWS-Flächenformel ergibt sich

$$722{,}54\ \text{m}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot 60{,}98\ \text{m} \cdot \sin(68{,}081\ \text{gon})$$

und somit b = 27,02 m. Mit dem Kosinussatz erhält man c = 53,53 m.

Probe: Hier sollte man am besten den Gesamtflächeninhalt durch Zerlegung entlang der anderen Diagonalen zurückrechnen: Mit dem Kosinussatz ergibt sich AC = 64,91 m. Der Winkel bei A wird zerlegt in 27,053 gon (besser mit Kosinussatz berechnen) und 56,108 gon. Der Gesamtflächeninhalt ergibt sich aus den beiden Teilflächen zu

$$F = 841{,}30\ \text{m}^2 + 560{,}69\ \text{m}^2 = 1401{,}99\ \text{m}^2 \checkmark$$

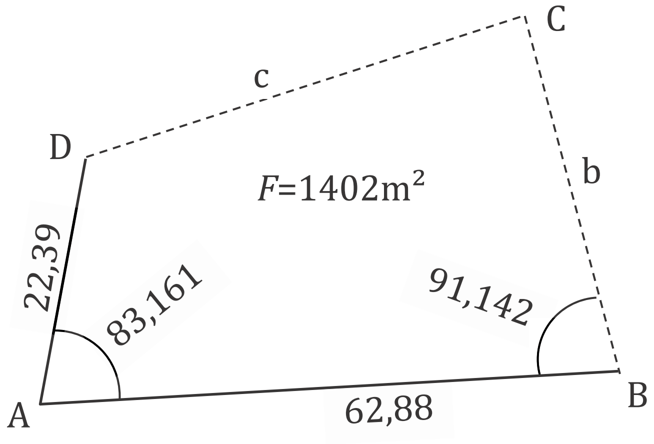


Abbildung 12 (zu Beispiel 9) Die Winkel sind in Gon angegeben, die Strecken in Meter.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel09

Aufgabe 11: a) Stecken Sie die Punkte P und Q in Abbildung 13 so ab, dass PQ parallel zu AD verläuft und die Fläche des Vierecks ABCD durch PQ halbiert wird. b) Teilen Sie die Fläche danach entlang einer abzusteckenden Geraden RS senkrecht zu AD in zwei gleich große Teilflächen. Bestimmen Sie die Lagen der Punkte P,Q,R,S auf den jeweiligen Seiten. Als Probe sollen Sie aus den Maßen aller Teilflächen deren Flächeninhalte zurückrechnen. Hinweis: Sie können auf die Berechnung in Beispiel 3 zurückgreifen, der dasselbe Viereck zugrunde lag.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe11a

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe11b

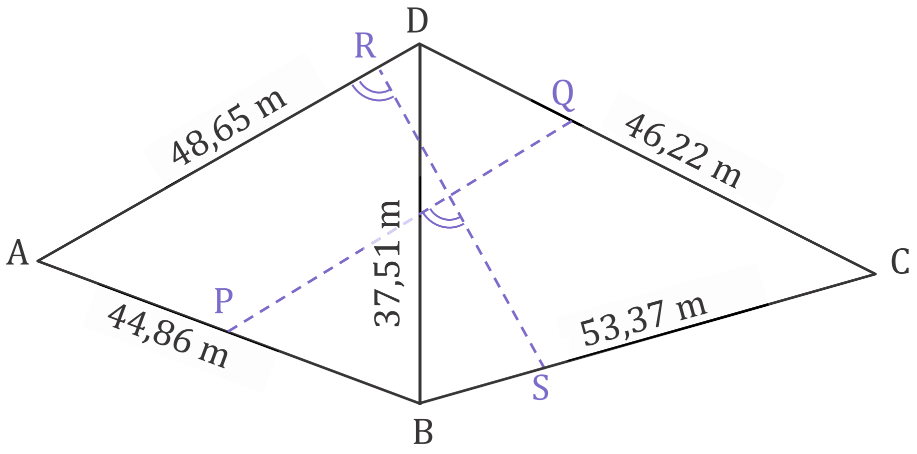


Abbildung 13 (zu Aufgabe 11)

Beispiel 10: Gegeben sind folgende lokale ebene Koordinaten:

Punkt	Nord [m]	Ost [m]
A	16,10	23,06
B	17,11	108,07
C	107,08	102,12
D	119,63	14,02

Bestimmen Sie die Koordinaten eines abzusteckenden Punktes E auf der Geraden AB, so dass das ebene Viereck AECD den Flächeninhalt 10000m² besitzt.

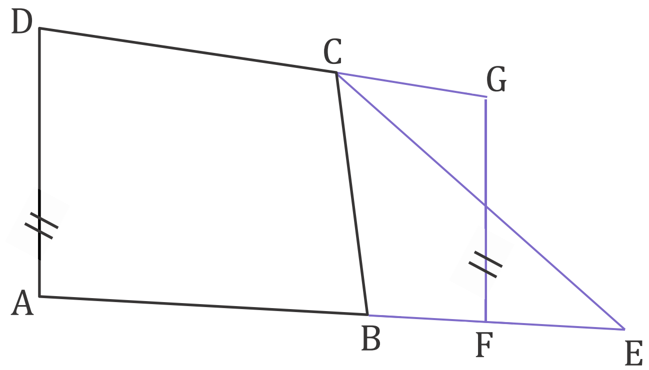


Abbildung 14: (zu Beispiel 10 und Aufgabe 12)

Lösung 1: Zunächst berechnet man den Flächeninhalt des Vierecks ABCD aus kartesischen Koordinaten, z.B. mit der Dreiecksformel

$$F_{\mathrm{ABCD}} = ½\cdot[23{,}06\cdot(17{,}11-119{,}63)\mathrm{m}^2+14{,}02\cdot(16{,}10-107{,}08)\mathrm{m}^2$$
$$+102{,}12\cdot(119{,}63-17{,}11)\mathrm{m}^2+108{,}07\cdot(107{,}08-16{,}10)\mathrm{m}^2] = 8330{,}95\mathrm{m}^2$$

Damit verbleibt für die Fläche des Dreiecks BEC ein Inhalt von F_{BEC} = 1669,05 m². Die Richtungswinkel t_{AB} und t_{CB} erhält man aus Koordinaten zu t_{AB} = 99,244 gon und t_{CB} = 195,796 gon. Daraus ergibt sich ein Innenwinkel CBE von 103,448 gon. Die Strecke CB erhält man aus Koordinaten zu e_{CB} = 90,167 m. So wie in Beispiel 8 erhalten wir die Strecke BE zu e_{BE} = 37,08 m. Nun wird der Punkt E polar an B angehängt:

$$y_{\mathrm{E}} = 108{,}07\,\mathrm{m} + 37{,}08\,\mathrm{m} \cdot \sin(99{,}244\ \mathrm{gon}) = \underline{145{,}14\,\mathrm{m}}$$
$$x_{\mathrm{E}} = 17{,}11\,\mathrm{m} + 37{,}08\,\mathrm{m} \cdot \cos(99{,}244\ \mathrm{gon}) = \underline{17{,}55\ \mathrm{m}}$$

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=tutorial/areapart&DecimalSeparator=Comma

Lösung 2: Eine ganz andere Lösungsidee geht von folgender Gleichung (Dreiecksformel) aus:

$$F_{\mathrm{AECD}} = \tfrac{1}{2} \cdot [23{,}06 \cdot (x_{\mathrm{E}} - 119{,}63)\mathrm{m}^2 + 14{,}02 \cdot (16{,}10 - 107{,}08)\mathrm{m}^2$$
$$+ 102{,}12 \cdot (119{,}63 - x_{\mathrm{E}})\mathrm{m}^2 + y_{\mathrm{E}} \cdot (107{,}08 - 16{,}10)\mathrm{m}^2] = 10000\,\mathrm{m}^2$$

Außerdem muss der Punkt E auf der Geraden AB liegen, also eine entsprechende Geradengleichung erfüllen. Eine Möglichkeit, eine solche Geradengleichung aufzustellen, ist die Parameterform mit Geradenparameter τ.

[G&J 7.2.4] http://de.wikipedia.org/wiki/Geradengleichung

In Vektorschreibweise lautet diese:

$$\binom{x_E}{y_E} = \binom{x_A}{y_A} + \tau \cdot \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Nach Einsetzen der Koordinaten von A und B erhält man die Koordinaten von E in Abhängigkeit vom unbekannten Parameter τ. Nun setzt man diese Ausdrücke in die Dreiecksformel ein löst nach τ auf. Nach Einsetzen von τ in die Geradengleichung ergibt sich der Punkt E.

Probe: Man berechnet die Fläche AECD aus endgültigen kartesischen Koordinaten und erhält F_{AECD} = 10000 m² ✓. Zusätzlich muss man sich überzeugen, dass der Punkt E auf der Gerade AB liegt. Hierzu berechnet man den Richtungswinkel t_{AE} = 99,244 gon ✓.

Aufgabe 12: Bestimmen Sie mit den gegebenen Koordinaten von Beispiel 10 die Koordinaten zweier abzusteckender Punkte F und G, so dass das ebene Viereck ABFG den Flächeninhalt 10000m² besitzt und ein Trapez ist (↗ Abbildung 14). Hinweis: Diese Aufgabe ist recht anspruchsvoll. Man kann prinzipiell wie in Lösung 1 oder 2 von Beispiel 10 vorgehen. Bei Lösung 1 empfiehlt es sich, eine Gleichung für die Höhe *h* im Trapez AFGD aufzuschreiben und diese zu lösen.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=tutorial/areapart&DecimalSeparator=Comma

4 KREIS UND ELLIPSE

4.1 KREISBOGEN UND KREISSEGMENT

Frischen Sie notfalls Ihre Kenntnisse über die Geometrie des Kreises auf. Folgende Begriffe sollten Ihnen geläufig sein:

Kreisbogen, Kreissektor (Kreisausschnitt), Kreissegment (Kreisabschnitt), Radius, Sekante, Sehne, Tangente, Zentriwinkel, Peripheriewinkel, Sehnen-Tangenten-Winkel

[G&J 2.4.9] http://de.wikipedia.org/wiki/Kreis_(Geometrie)

Grundlegend ist die Bogenformel, die einen Zusammenhang zwischen Bogenlänge *b*, Radius *r*, Zentriwinkel α und Radiant ρ herstellt:

$$b = r \cdot \frac{\alpha}{\rho}$$

Der Radiant ρ ist der Winkel, der im Bogenmaß die Größe 1 hat:

$$\rho = 1\ \text{rad} = 63{,}66198\ \text{gon} = 57{,}29578° = 3437{,}747' = 206264{,}8''$$

In die Bogenformel ist ρ in derselben Einheit wie α einzusetzen, damit sich die Winkeleinheiten aufheben.

Beispiel 11: Rechnen Sie die nautische Geschwindigkeit Knoten in Kilometer pro Stunde um. Nutzen Sie dazu die Bogenformel.

Lösung: 1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde. Eine Seemeile (sm) ist der 60ste Teil des Abstandes zweier Parallelkreise (Breitenkreise) auf der Erdkugel. Der zum Bogen b = 1 sm gehörige Zentriwinkel ist also α = 1'. Mit einem mittleren Erdradius von *R* = 6371 km ergibt sich 1 sm = 6371 km · 1' / 3437,747' = 1,853 km. Daraus ergibt sich 1 kn = 1,853 km/h. Hinweis: Aus historischen Gründen beträgt der tatsächliche Wert 1,852 km/h.

Aufgabe 13: Eratosthenes von Kyrene (276-195 v. Chr.) bestimmte den Erdumfang aus dem geozentrischen Winkel α zwischen Alexandria und Syene gleich 1/50 des Vollwinkels und dem entsprechenden Bogen *b* = 5000 Stadien (altägyptisches Längenmaß). Berechnen Sie den sich daraus ergebenden Erdradius in Kilometer, wenn Sie ein Stadionmaß von 157,5 m unterstellen. Hinweise: 1. Das Stadionmaß, auf welches Eratosthenes sich bezog, ist nicht sicher bekannt. 2. Eratosthenes kannte nicht den Wert von π, weshalb er nur den Erdumfang berechnen konnte.

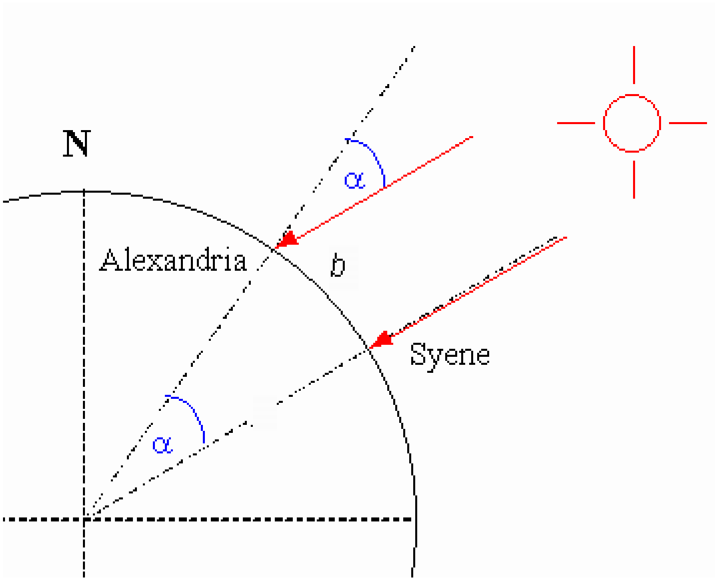
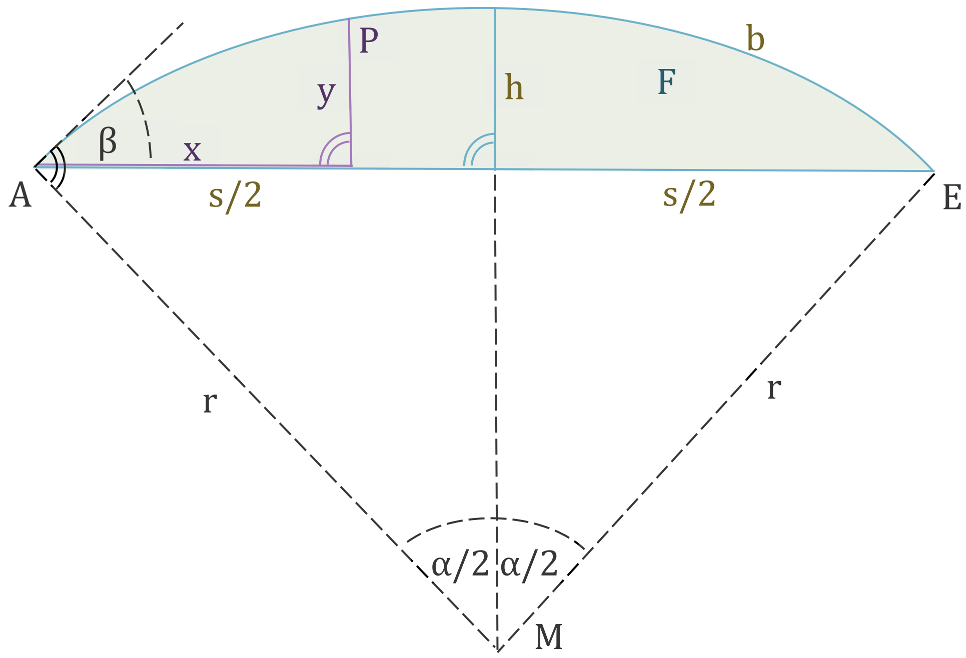


Abbildung 15: Bestimmung des Erdumfangs durch Eratosthenes (zu Aufgabe 13)
http://www.pimath.de/geo/geo1.html



M Kreismittelpunkt
A Bogenanfang
E Bogenende
P Bogenkleinpunkt

r Radius
s Sehne
b Bogen
h Pfeilhöhe
F Kreissegmentfläche
x Abszisse
y Ordinate

α Zentriwinkel
β=α/2 Sehnen-tangentenwinkel

Abbildung 16: Kreissegment

Zur Berechnung von Kreisbögen und Kreissegmenten (↗Abbildung 16) benötigen Sie außerdem folgende Formeln:

$$s = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$h = r\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$y = \sqrt{r^2-\left(\frac{s}{2}-x\right)^2} - r + h$$

$$r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

$$F = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\rho} - \sin\alpha\right)$$

Punkte auf dem Bogen, die aufgenommen oder abgesteckt werden, nennt man Bogenkleinpunkte.

Beispiel 12: Über einer Sehne AE der Länge 100,00 m soll ein Bogen mit dem Radius 200,00 m abgesteckt werden. Berechnen Sie die orthogonalen Absteckwerte (y_i;x_i) von vier Bogenkleinpunkten P_i, i = 1,2,3,4.

Lösung: Der Zentriwinkel zur Sehne beträgt α = 2 arcsin(100,00/400,00) = 32,172 gon. Daraus ergibt sich eine Pfeilhöhe von h = 200,00·(1-cos(16,086 gon)) = 6,351 m. Am einfachsten wählt man x_1 = 20,00 m, x_2 = 40,00 m, x_3 = 60,00 m, x_4 = 80,00 m. Dann berechnet man

$$y_1 = \sqrt{(200{,}00\ \mathrm{m})^2 - (50{,}00\ \mathrm{m} - 20{,}00\ \mathrm{m})^2} - 200{,}00\ \mathrm{m} + 6{,}351\ \mathrm{m} = 4{,}088\ \mathrm{m}$$

und y_2 = 6,101 m. Die anderen beiden Ordinaten erhält man aus der Symmetrie: <u>P_1(4,09 m; 20,00m), P_2(6,10 m; 40,00m), P_3(6,10 m; 60,00m), P_4(4,09 m; 80,00m).</u>

Probe: Eine Möglichkeit besteht darin, für die Dreiecke AEP_i den Umkreisradius zu berechnen. Dazu benötigen wir die Innenwinkel

∢P_1AE = arctan(4,088 m/20,00 m) = 12,836 gon
∢AEP_1 = arctan(4,088 m/80,00 m) = 3,250 gon
∢P_2AE = arctan(6,101 m/40,00 m) = 9,636 gon
∢AEP_2 = arctan(6,101 m/60,00 m) = 6,451 gon

Mit einer Formel für den Umkreis des Dreiecks (mit Bezeichnungen der Abbildung 1)

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

[G&J 2.5.2] http://de.wikipedia.org/wiki/Umkreis

erhält man

r = 50,00/sin(12,836 gon+3,250 gon) = 200,00 ✓
r = 50,00/sin(9,636 gon+6,451 gon) = 199,99 ✓

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel12

Aufgabe 14: Zwei gerade Abschnitte AB und CD eines Verkehrsweges sollen durch einen Kreisbogen BC verbunden werden, so dass AB und CD in B und C Tangenten an diesen Bogen sind. Gegeben sind

Punkt	Nord [m]	Ost [m]
A	14,02	18,41
B	16,10	19,63
C	23,06	19,97
D	26,87	18,21

Berechnen Sie den Radius und die Länge des Kreisbogens sowie die orthogonalen Absteckwerte (y_i,x_i) von Bogenkleinpunkten P_i bezogen auf die Gerade BC als Abszisse mit B als Ursprung ($x = 0$) und $x_1 = 1{,}00$ m; $x_2 = 2{,}00$ m ...

Die Aufgabe ist überbestimmt: Für beliebige Koordinaten ergibt sich im Allgemeinen keine Lösung.

4.2 NÄHERUNGSFORMELN FÜR FLACHE KREISBÖGEN

Sollte die Bogenlänge b klein im Verhältnis zum Radius r sein, so spricht man von einem flachen Kreisbogen. Praktisch ist das etwa bei einem Verhältnis $b/r<0{,}1$ gegeben. Das entspricht einem Zentriwinkel von 6 gon oder weniger.

Für flache Bögen ist der Zentriwinkel α klein und sin(α/2) kann durch α/2 im Bogenmaß ersetzt werden, usw. In diesem Fall wird der Kreisbogen durch eine quadratische Parabel mit Achse senkrecht zur Sehne ersetzt. Es ergeben sich $b \approx s$ sowie Folgendes:

$$h \approx \frac{s^2}{8r}$$

$$y \approx \frac{x \cdot (s-x)}{2r}$$

$$F \approx \frac{2}{3} hs$$

Aufgabe 15: Die parallelen Sehnen in Abbildung 17 haben einen Abstand von 1,00 m. Berechnen Sie die Längen der vier kurzen Sehnen a) mit der Näherungsformel und b) mit der exakten Formel.

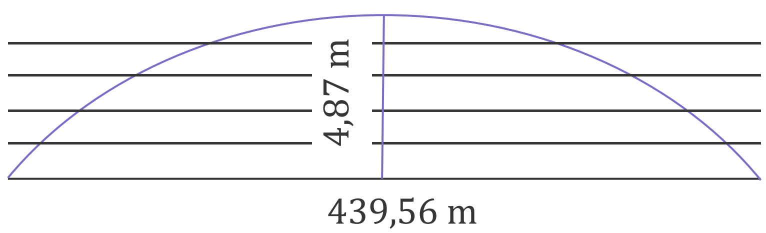


Abbildung 17: zu Aufgabe 15 (nicht maßstäblich)

4.3 SEHNEN-TANGENTEN-VERFAHREN

Es gibt viele Verfahren, um die Absteckelemente von Kreisbogenkleinpunkten zu berechnen. Wird ein Tachymeter im Bogenendpunkt E aufgebaut, ergeben sich die polaren Absteckelemente Winkel φ und Strecke *e* eines Bogenkleinpunktes P nach dem Sehnen-Tangenten-Verfahren [G&J 10.2.4], ↗ Abbildung 18.

Der Winkel φ ist die Differenz der Sehnen-Tangenten-Winkel α/2 über der Sehne AE und (α-ω)/2 über der Sehne PE. Daraus folgt

$$\varphi = \frac{\omega}{2} \text{ und } e = 2r\sin\frac{\alpha-\omega}{2}$$

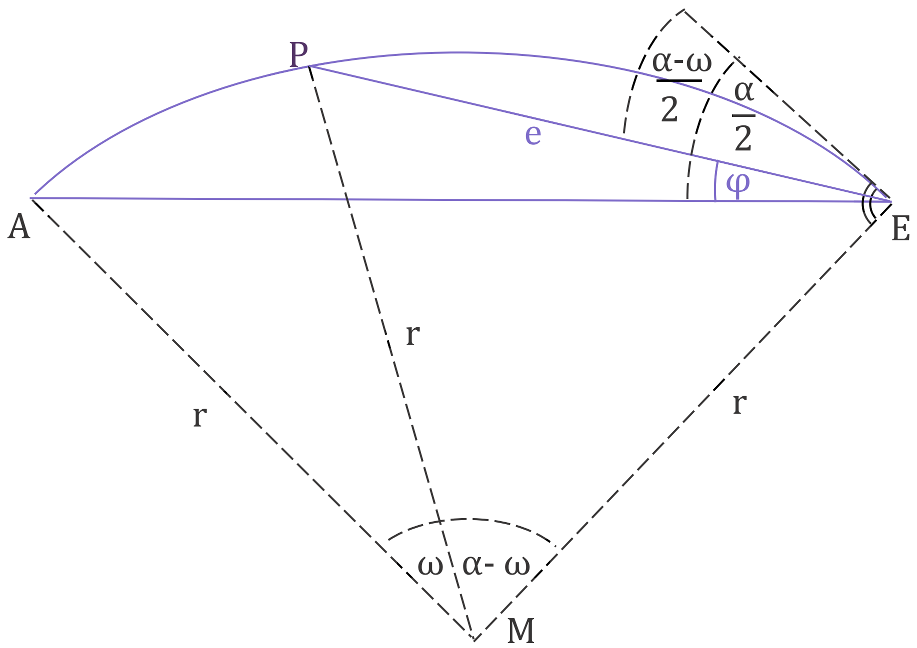


Abbildung 18: Sehnen-Tangenten-Verfahren

Beispiel 13: Wir berechnen für den Bogen AE aus Beispiel 12 die polaren Absteckwerte (φ_i,e_i) von vier Bogenkleinpunkten P_i, i = 1,2,3,4, die den Bogen fünfteln.

Lösung: Der Zentriwinkel α = 32,172 gon wird gefünftelt: ω_1 = 6,434 gon; ω_2 = 12,869 gon; ω_3 = 19,303 gon; ω_4 = 25,738 gon. Daraus folgt φ_1 = 3,217 gon; φ_2 = 6,434 gon; φ_3 = 9,652 gon; φ_4 = 12,869 gon und e_1 = 80,308 m; e_2 = 60,411 m; e_3 = 40,360 m; e_4 = 20,206 m.

Probe: Mittels Kosinussatz berechnen wir die Abstände benachbarter Punkte auf dem Bogen.

$AP_1^2 = 100{,}00^2\text{m}^2+80{,}308^2\text{m}^2-2\cdot100{,}00\text{ m}\cdot80{,}308\text{ m}\cdot\cos(3{,}217\text{ gon})$
$= 408{,}28\text{ m}^2$ ✓
$P_1P_2^2 = 80{,}308^2\text{m}^2+60{,}411^2\text{m}^2-2\cdot80{,}308\text{ m}\cdot60{,}411\text{ m}\cdot\cos(6{,}434\text{ gon}-3{,}217\text{ gon})$
$= 408{,}28\text{ m}^2$ ✓

$P_2P_3^2 = 60{,}411^2 m^2 + 40{,}360^2\ m^2 - 2 \cdot 60{,}411\ m \cdot 40{,}360\ m \cdot \cos(9{,}652\ gon - 6{,}434\ gon)$
$= 408{,}27\ m^2$ ✓
$P_3P_4^2 = 40{,}360^2\ m^2 + 20{,}206^2 m^2 - 2 \cdot 40{,}360\ m \cdot 20{,}206\ m \cdot \cos(12{,}869\ gon - 9{,}652\ gon)$
$= 408{,}27\ m^2$ ✓
$P_4E^2 = 20{,}206^2 m^2 = 408{,}27\ m^2$ ✓

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel13

Aufgabe 16: Berechnen Sie nach dem Sehnen-Tangenten-Verfahren zu Beispiel 13 einen weiteren Bogenkleinpunkt P_5 in der Mitte zwischen P_3 und P_4.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe16

4.4 GRUNDLEGENDES ÜBER ELLIPSEN

Ellipsen und Ellipsenbögen spielen in den Geowissenschaften eine wichtige Rolle. Sie treten als

- Meridianellipsen der Erde,
- Kepler-Ellipsen von künstlichen Erdsatelliten u.a. Himmelskörpern,
- Bildkurven von Kreisbögen bei vielen kartographischen Abbildungen,
- Verzerrungsellipsen von kartographischen Abbildungen (↗ Tissotsche Indikatrix http://de.wikipedia.org/wiki/Tissotsche_Indikatrix),
- Fehlerellipsen bei der 2D-Punktbestimmung und
- Schnittkurven von Kegeln und Zylindern in CAD und Virtual Reality

in Erscheinung.

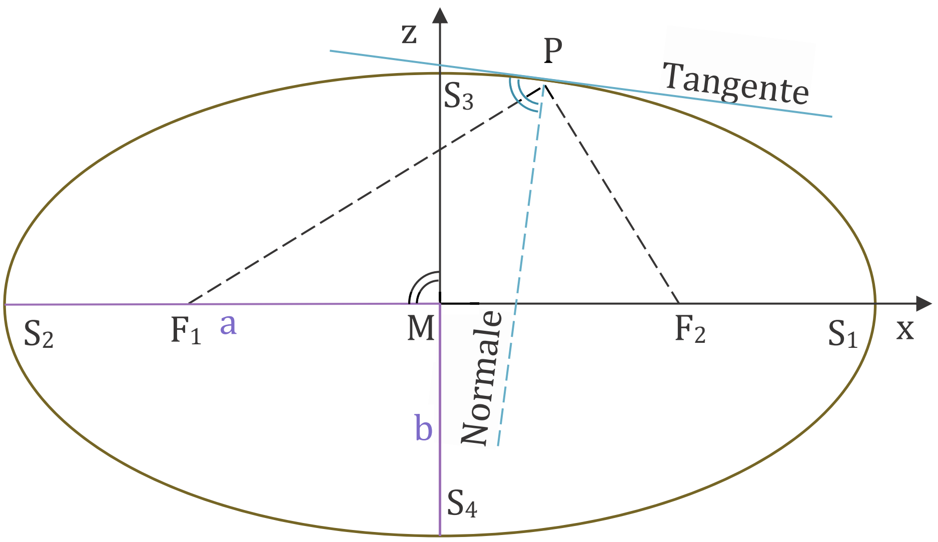


Abbildung 19: Geometrie der Ellipse

Eine Ellipse besteht aus folgenden geometrischen Elementen (↗ Abbildung 19):

- Mittelpunkt M, Brennpunkte F_1 und F_2
- Hauptscheitelpunkte S_1 und S_2, Hauptachse S_1S_2 der Länge $2a$
- Nebenscheitelpunkte S_3 und S_4, Nebenachse S_3S_4 der Länge $2b$
- große Halbachsen MS_1 und MS_2 der Länge a
- kleine Halbachsen MS_3 und MS_4 der Länge b

Die Ellipse hat definitionsgemäß die Eigenschaft, dass F_1P+F_2P für alle Ellipsenpunkte P konstant ist. Hierauf basiert die sogenannte **Gärtnerkonstruktion**.
http://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G.C3.A4rtnerkonstruktion

Aufgabe 17: Bestimmen Sie F_1P+F_2P aus den Halbachsenlängen. Hinweis: Setzen Sie speziell $P=S_1$ oder $P=S_2$.

Eine andere, für geodätische Zwecke geeignetere Definition der Ellipse ist über eine Ellipsengleichung möglich: Der geometrische Ort aller Punkte der *xz*-Koordinatenebene, die die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} = 1$$

erfüllen, ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt (0,0) und den Halbachsen a und b. Eine alternative Darstellungsform derselben Ellipse ist die Parameterform der Ellipsengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\beta \\ b\sin\beta \end{pmatrix}$$

mit dem Ellipsenparameter β, der das Intervall [0,2π] durchläuft. Diese Darstellung ist verwandt mit der Parameterform der Geradengleichung (↗ Lösung 2 zu Beispiel 10).

4.5 ABPLATTUNG UND EXZENTRIZITÄTEN

Die Abweichung der Ellipse von der Kreisgestalt wird durch einen Formparameter beschrieben. Je nach Anwendung kommen die in Tabelle 2 verzeichneten Parameter in Frage. Für den Kreis, der eine Ellipse mit $a=b$ ist, sind alle diese Formparameter gleich Null.

Aufgabe 18: Überlegen Sie sich, dass der Abstand $MF_1=MF_2$ der Brennpunkte vom Mittelpunkt genau die lineare Exzentrizität E ist. Hinweis: Hierfür ist die Lösung von Aufgabe 17 nützlich.

Tabelle 2: Formparameter der Ellipse (WGS84=World Geodetic System 1984)

Formparameter	Formel	Wert für die Meridianellipse (nach WGS84)
Abplattung	$f = \frac{a-b}{a}$	1:298,257 223 563
lineare Exzentrizität	$E = \sqrt{a^2 - b^2}$	521 854,008 423 39 m
erste numerische Exzentrizität	$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	e^2=6,694 379 990 14 · 10^{-3}
zweite numerische Exzentrizität	$e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	e'^2=6,739 496 742 28 · 10^{-3}

⚠ *Zahlenwerte werden meist nicht für e und e‘angegeben, sondern für e^2 und e'^2.*

4.6 DIE MERIDIANELLIPSE

Die Erdfigur wird in der Geodäsie in guter Näherung durch ein Rotationsellipsoid beschrieben. Das ist die Fläche, die entsteht, wenn eine Ellipse um eine Achse rotiert, hier um die kleine Halbachse *b*. Die Schnittebene, die einen Punkt P und die Rotationsachse enthält, nennt man Meridianebene von P, die Schnittkurve ist die Meridianellipse. Die Lage des Punktes P auf der Meridianellipse wird durch einen von drei Winkeln beschrieben (↗ Abbildung 20):

Geographische Breite φ: Winkel, den die Ellipsoidnormale (senkrecht auf der Tangentialebene) in P mit der Äquatorebene einschließt

⚠ *Speziell in der älteren deutschsprachigen Literatur ist für die geographische Breite auch das Formelsymbol B verbreitet.*

Geozentrische Breite ψ: Winkel, den der Radius OP mit der Äquatorebene einschließt

Reduzierte Breite β: Winkel, den der Radius OP‘ mit der Äquatorebene einschließt. P‘ ist der Punkt auf dem Kreis um das Geozentrum O mit dem Radius *a*, der dieselbe *x*-Koordinate wie P hat (↗ Abbildung 20).

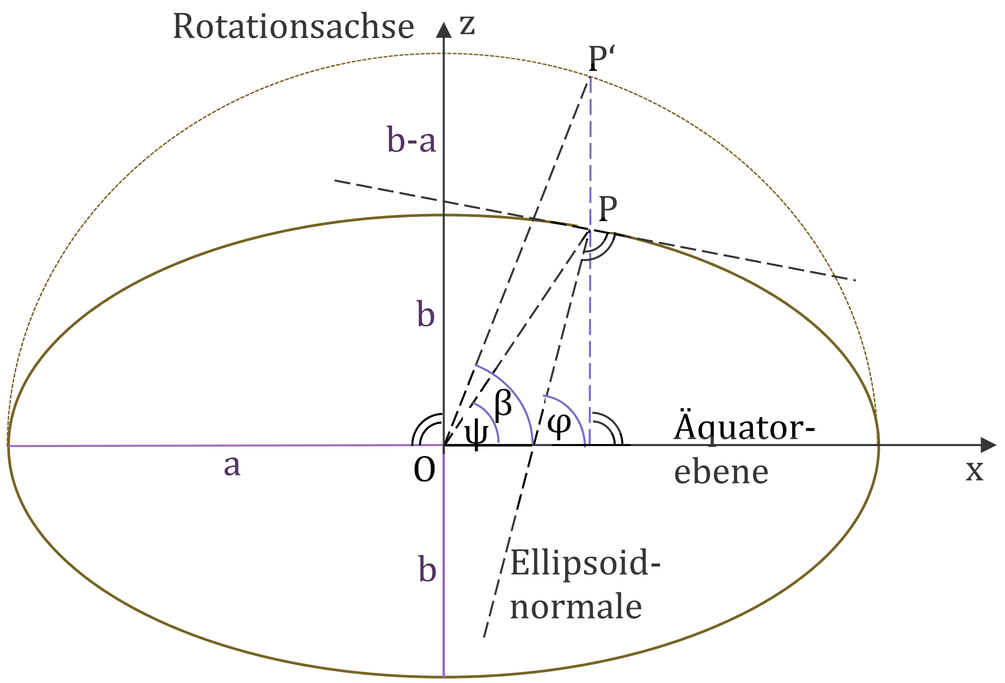


Abbildung 20: Meridianellipse der Erde

Es gilt $\psi \leq \beta \leq \varphi$. Die reduzierte Breite β spielt eine große Rolle bei vielen geodätischen Ellipsenberechnungen. Sie tritt als Kurvenparameter in der Parameterdarstellung der Ellipse in Erscheinung (↗ Abschnitt 4.4). Es gelten folgende Umrechnungsformeln:

$$\tan\varphi = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\tan\psi}{1-e^2}$$

Beispiel 14: Die Merianellipse der Erde nach WGS84 (a= 6 378 137.0000 m) soll konstruiert werden. Dazu sollen Punkte in den geographischen Breiten φ =-90°,-60°,-30°,0°,30°,60°,90° exakt berechnet werden.

Lösung: Aus φ wird zunächst $\beta = \arctan(\tan(\varphi)\sqrt{1-e^2})$ mit e^2=6,69437999014 · 10^{-3} (↗ Tabelle 2) berechnet. Daraus wird entsprechend der Parameterdarstellung der Ellipse $x = a\cos\beta$ und $z = b\sin\beta$ berechnet.

Probe: Hierfür ist die Gärtnerkonstruktion nützlich. Die Brennpunktkoordinaten sind (-E,0) und (E,0) mit E=521 854,008 423 39 (↗ Tabelle 2 und Aufgabe 18). Daraus berechnet man F_1P+F_2P für alle Punkte und überzeugt sich, dass das Ergebnis konstant ist und mit dem Ergebnis von Aufgabe 17 übereinstimmt.

φ [°]	β [°]	x [m]	z [m]	F_1P+F_2P [m]
-90,000000	-90,000000	0,000	-6356752,314	12756274,000 ✓
-60,000000	-59,916608	3197104,587	-5500477,134	12756274,000 ✓
-30,000000	-29,916748	5528256,639	-3170373,735	12756274,000 ✓
0,000000	0,000000	6378137,000	0,000	12756274,000 ✓
30,000000	29,916748	5528256,639	3170373,735	12756274,000 ✓
60,000000	59,916608	3197104,587	5500477,134	12756274,000 ✓
90,000000	90,000000	0,000	6356752,314	12756274,000 ✓

Aufgabe 19: Ein in Dresden senkrecht abgetäufter gerader Schacht würde theoretisch im Südpazifik wieder auf die Erdoberfläche treffen. Berechnen Sie, in welchem Abstand dieser Schacht am Geozentrum O vorbeigeht.

4.7 FLÄCHENINHALT UND BOGENLÄNGE

Während der Flächeninhalt der Ellipsenfläche sehr einfach aus

$$F = \pi ab$$

berechnet wird, sind Umfang und Bogenlänge nur schwer berechenbar. Die Berechnung führt auf ein sogenanntes Elliptisches Integral, welches durch Reihenentwicklungen angenähert werden muss.

In der Geodäsie ist die Berechnung der Meridianbogenlänge $m(\varphi)$ zwischen Äquator und einem Punkt auf dem Meridian mit der geographischen Breite φ von grundlegender Bedeutung. Von Vorteil ist die geringe Abplattung bzw. Exzentrizität der Meridianellipse, woraus sich eine akzeptable Konvergenzgeschwindigkeit der Reihenentwicklungen ergibt. Allerdings ist die Genauigkeitsforderung oft sehr hoch.

Eine häufig benutzte mm-genaue Näherungsformel für die Meridianbogenlänge $m(\varphi)$ auf dem WGS84-Ellipsoid lautet (ρ=Radiant)

$$m(\varphi) = 6367449{,}146\mathrm{m} \cdot \varphi/\rho - 16038{,}509\mathrm{m} \cdot \sin 2\varphi + 16{,}833\mathrm{m} \cdot \sin 4\varphi - 0{,}022\mathrm{m} \cdot \sin 6\varphi + 3 \cdot 10^{-5}\mathrm{m} \cdot \sin 8\varphi$$

Aufgabe 20: Berechnen Sie den Abstand zwischen den Parallelkreisen 50° und 51° auf dem WGS84 Ellipsoid mit der oben angegebenen Formel.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe20 (Hier werden noch genauere Formeln benutzt.)

5 EBENE EINSCHNEIDEVERFAHREN

5.1 BOGENSCHNITT

In der Ebene kann ein Neupunkt N(y_N,x_N) durch Messung zweier Strecken e_A und e_B zu zwei Festpunkten A(y_A,x_A) und B(y_B,x_B) bestimmt werden. Dies entspricht einem Bogenschlag um die Mittelpunkte A und B mit den Bogenradien e_A und e_B. N ist ein Schnittpunkt dieser Bögen. Hierbei sind drei **Fälle** möglich (↗Abbildung 21):

A) Der Bogenschnitt ist **zweideutig**, wenn der Abstand der Festpunkte e_{AB} kleiner als e_A+e_B ist. Dies ist der praktische Normalfall. Die richtige Lösung kann nur anhand von zusätzlichen Informationen, z.B. Näherungskoordinaten von N oder weiteren Messungen identifiziert werden.

B) Der Bogenschnitt ist **eindeutig**, wenn der Abstand der Festpunkte e_{AB} gleich e_A+e_B ist. Dies ist ein Sonderfall, der praktisch vermieden werden sollte.

C) Der Bogenschnitt liefert **keinen Schnittpunkt**, wenn der Abstand der Festpunkte e_{AB} größer als e_1+e_2 ist. Hier liegt wahrscheinlich ein grober Messfehler oder Irrtum vor. Er wurde auf diese Weise aufgedeckt.

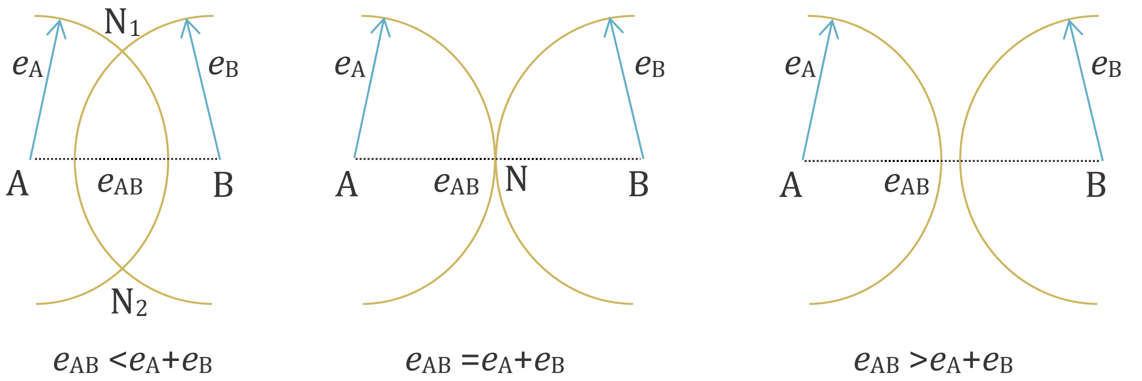


Abbildung 21: Nichteindeutigkeit des Bogenschnitts (links: Fall A. Mitte: Fall B. rechts: Fall C)

Die Berechnung des Bogenschnitts ist auf zwei verschiedene Arten möglich [G&J 7.2.5]:

Berechnung über das Dreieck ABN (↗Abbildung 22 links):

1. Den Abstand e_{AB} und den Richtungswinkel t_{AB} von AB berechnet man aus Koordinaten von A und B.
2. Den Innenwinkel α im Dreieck ABN berechnet man mittels Kosinussatz. Sollte der Kosinussatz keine Lösung ergeben, so liegt Fall C vor (kein Schnitt).
3. Daraus erhält man den Richtungswinkel $t_{AN} = t_{AB} \pm \alpha$. Man beachte, dass sich normalerweise zwei Lösungen ergeben, außer bei $\alpha = 0$ (Fall B).
4. Die Koordinaten von N erhält man durch Polares Anhängen von N an A.

5. **Probe**: Die Rechnung wird mit β und B wiederholt. Es müssen sich dieselben Koordinaten von N ergeben.

Berechnung über den Höhenfußpunkt H (↗Abbildung 22 rechts):

1. Den Abstand e_{AB} berechnet man aus Koordinaten von A und B.
2. Den Abschnitt p = AH berechnet man aus $p = (e_{AB}^2 + e_A^2 - e_B^2)/(2e_{AB})$. Dies ist der Kosinussatz, nachdem cos(α) durch p/e_A ersetzt wurde.
3. Die Höhe h = NH berechnet man durch $h = \sqrt{e_A^2 - p^2}$. Sollte die Wurzelbasis (der Radikand) negativ sein, so liegt Fall C vor (kein Schnitt).
4. Die Hilfsgrößen a und o sind definiert als $o = (y_B - y_A)/e_{AB}$ und $a = (x_B - x_A)/e_{AB}$. Eine Probe an dieser Stelle ist $a^2+o^2=1$.
5. Hiermit erhält man die Koordinaten von N als $y_N = y_A+op\pm ah$ und $x_N = x_A+ap\mp oh$. Die Lösung ist normalerweise zweideutig, außer bei $h = 0$ (Fall B). Beachten Sie, dass zu + bei y das Vorzeichen – bei x gehört und umgekehrt.
6. **Probe**: Die Rechnung wird mit q = BH und Vertauschen von A und B wiederholt. Beachten Sie, dass a und o dadurch ihr Vorzeichen ändern. Es müssen sich dieselben Koordinaten von N ergeben.

Eine universelle weitere Probemöglichkeit ergibt sich durch Zurückrechnen der gemessenen Strecken aus endgültigen Koordinaten.

Hinweis: Die zweite Berechnungsvariante kann als ebene Koordinatentransformation mit zwei Passpunkten aufgefasst werden (↗ Abschnitt 6.4).

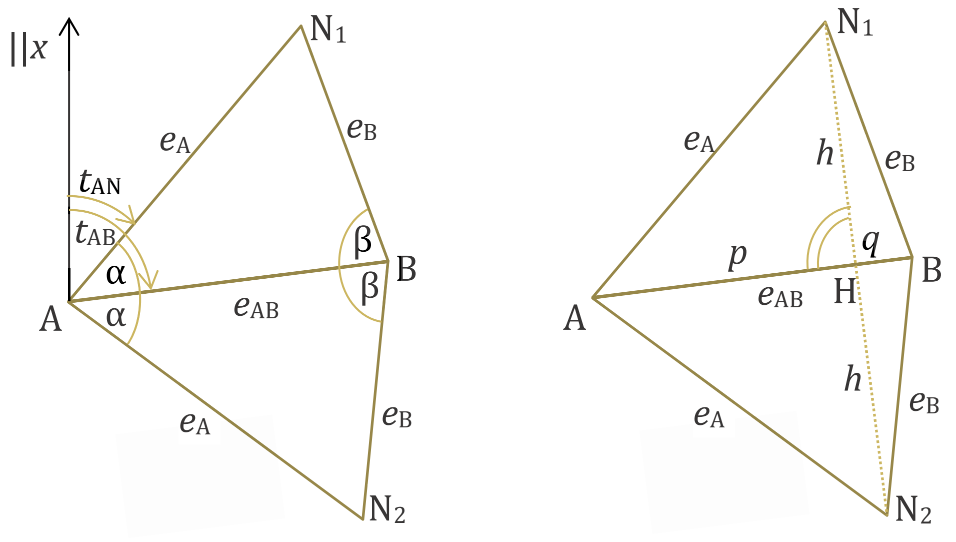


Abbildung 22: Berechnung des Bogenschnitts

Hat das Dreieck ABN einen sehr spitzen oder stumpfen Winkel, dann ist der Schnittpunkt N schlecht definiert. Es kommt zu einer Verstärkung von Messabweichungen und Rundungsfehlern. Die Probe wird i.d.R. schlecht erfüllt sein.

Beispiel 15: Sie empfangen die Signale zweier terrestrischer Funkfeuer (Sender für die Funknavigation) in den Punkten A(y_A = 1610 km, x_A = 2306 km) und B(y_B = 1402 km, x_B = 1711 km). Anhand der Signalstärken berechnen Sie einen Abstand Ihres terrestrischen Standortes zu A von e_A = 320 km und zu B von e_B = 410 km. Berechnen Sie die Koordinaten Ihres Standorts in ebener Näherungsrechnung.

Lösung über das Dreieck ABN: Aus Koordinaten berechnen Sie zunächst e_{AB} = 630,3 km und t_{AB} = 221,4 gon. Aus den drei Strecken e_A, e_B, e_{AB} berechnen Sie die Innenwinkel α = 38,6 gon und β = 29,3 gon. Damit erhalten Sie

t_{AN} = 221,4 gon ± 38,6 gon = 260,0 gon oder 182,8 gon

y_{N_1} = 1610 km + 320 km · sin(260,0 gon) = <u>1351 km</u>
x_{N_1} = 2306 km + 320 km · cos(260,0 gon) = <u>2118 km</u>

y_{N_2} = 1610 km + 320 km · sin(182,8 gon) = <u>1695 km</u>
x_{N_2} = 2306 km + 320 km · cos(182,8 gon) = <u>1998 km</u>

Probe: Über β und B ergeben sich dieselben Koordinaten:

t_{BN} = 21,4 gon ± 29,3 gon = 392,1 gon oder 50,7 gon

y_{N_1} = 1402 km + 410 km · sin(392,1 gon) = 1351 km ✓
x_{N_1} = 1711 km + 410 km · cos(392,1 gon) = 2118 km ✓

y_{N_2} = 1402 km + 410 km · sin(50,7 gon) = 1695 km ✓
x_{N_2} = 1711 km + 410 km · cos(50,7 gon) = 1998 km ✓

Lösung über den Höhenfußpunkt H: Aus Koordinaten berechnen Sie zunächst e_{12} = 630,3 km. Aus den drei Strecken e_A, e_B, e_{AB} berechnen Sie die Abschnitte p = 263,0 km und q = 367,3 km. Die Probe $e_{AB} = p+q$ ist offenbar erfüllt. Damit erhalten Sie

$$h = \sqrt{320^2 - 263{,}0^2}\ \text{km} = 182{,}3\ \text{km}$$

und als Probe

$$h = \sqrt{410^2 - 367{,}3^2}\ \text{km} = 182{,}2\ \text{km}\ ✓$$

Die Hilfsgrößen sind

$$o = \frac{1402 - 1610}{630{,}3} = -0{,}3300$$

$$a = \frac{1711 - 2306}{630{,}3} = -0{,}9440$$

Die Probe ergibt a^2+o^2 = 1,00004 ≈ 1✓. Nun erhält man die Ergebnisse

$$y_{N_1} = 1610\text{ km} - 0{,}3300 \cdot 263{,}0\text{ km} - 0{,}9440 \cdot 182{,}2\text{ km} = \underline{1351\text{ km}}$$
$$x_{N_1} = 2306\text{ km} - 0{,}9440 \cdot 263{,}0\text{ km} + 0{,}3300 \cdot 182{,}2\text{ km} = \underline{2118\text{ km}}$$

$$y_{N_2} = 1610\text{ km} - 0{,}3300 \cdot 263{,}0\text{ km} + 0{,}9440 \cdot 182{,}2\text{ km} = \underline{1695\text{ km}}$$
$$x_{N_2} = 2306\text{ km} - 0{,}9440 \cdot 263{,}0\text{ km} - 0{,}3300 \cdot 182{,}2\text{ km} = \underline{1998\text{ km}}$$

Probe: Wenn man A und B vertauscht, ergeben sich dieselben Lösungen:

$$y_{N_1} = 1402\text{ km} + 0{,}3300 \cdot 367{,}3\text{ km} - 0{,}9440 \cdot 182{,}2\text{ km} = 1351\text{ km} \checkmark$$
$$x_{N_1} = 1711\text{ km} + 0{,}9440 \cdot 367{,}3\text{ km} + 0{,}3300 \cdot 182{,}2\text{ km} = 2118\text{ km} \checkmark$$

$$y_{N_2} = 1402\text{ km} + 0{,}3300 \cdot 367{,}3\text{ km} + 0{,}9440 \cdot 182{,}2\text{ km} = 1695\text{ km} \checkmark$$
$$x_{N_2} = 1711\text{ km} + 0{,}9440 \cdot 367{,}3\text{ km} - 0{,}3300 \cdot 182{,}2\text{ km} = 1998\text{ km} \checkmark$$

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel15

Aufgabe 21: Von zwei Punkten P und Q wurden Horizontalstrecken zu drei Punkten A,B,C gemessen:

PA = 17,59 m	PB = 16,78 m	PC = 22,68 m
QA = 26,04 m	QB = 17,23 m	QC = 17,45 m

A,B,C liegen etwa in einer Vertikalebene. Der horizontale Abstand AC beträgt 23,06 m. Berechnen Sie, wie weit B von P aus gesehen vor oder hinter der Vertikalebene durch A und C liegt.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe21

5.2 VORWÄRTSSCHNITT

In der Ebene kann ein Neupunkt N(y_N,x_N) aus zwei Richtungswinkeln t_{1N} und t_{2N} von zwei Festpunkten A(y_A,x_A) und B(y_B,x_B) bestimmt werden. Dies entspricht dem Schnitt zweier Strahlen (Halbgeraden) mit Anfangspunkten in A und B. Schneiden sich die Strahlen, dann ist der Vorwärtsschnitt eindeutig. Andernfalls muss ein grober Fehler oder Irrtum vorliegen und wurde auf diese Weise aufgedeckt. Die Richtungswinkel können aus der Orientierung von Richtungssätzen über bekannte Anschlusspunkte bestimmt werden.

Manchmal wird der Vorwärtsschnitt als Bestimmung des Neupunktes aus den Innenwinkeln α und β im Dreieck ABN aufgefasst. Dann ist der Schnittpunkt nicht eindeutig. Wie beim Bogenschnitt gibt es eine zweite Lösung symmetrisch zu AB. Daher ist diese Auffassung nachteilig.

Die Berechnung des Vorwärtsschnitts ist auf zwei verschiedene Arten möglich [G&J 7.2.6]:

Berechnung über die direkten Formeln:

$$x_N = x_A + \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \cdot \tan t_{BN}}{\tan t_{AN} - \tan t_{BN}}$$

$$y_N = y_A + (x_N - x_A) \cdot \tan t_{AN}$$

Probe: Man benutzt dieselben Formeln mit Vertauschung von A und B.

Wenn kein Schnitt existiert, wird trotzdem ein Ergebnis erhalten, nämlich der Punkt, der sich durch Verlängerung der Strahlen nach hinten ergibt. Selbst die Probe o.g. würde stimmen! Ausnahme: Die Strahlen sind parallel, woraus eine Division durch Null resultiert.

Berechnung über das Dreieck ABN (↗Abbildung 23):

1. Den Abstand e_{AB} und den Richtungswinkel t_{AB} von AB berechnet man aus Koordinaten von A und B.
2. Die Innenwinkel α und β im Dreieck ABN berechnet man aus den Differenzen der Richtungswinkel: $\alpha = |\, t_{\mathrm{AB}} - t_{\mathrm{AN}}|, \beta = |\, 200\mathrm{gon} + t_{\mathrm{AB}} - t_{\mathrm{BN}}|$. Ist $\alpha + \beta \geq 200$ gon, so existiert kein Schnittpunkt.
3. Andernfalls berechnet man die Strecke AN über Sinussatz im Dreieck ABN.
4. Die Koordinaten von N erhält man durch Polares Anhängen von N an A.
5. **Probe**: Die Rechnung wird mit B wiederholt. Es müssen sich dieselben Koordinaten von N ergeben.

Eine universelle weitere Probemöglichkeit ergibt sich durch Zurückrechnen der gegebenen Richtungswinkel aus endgültigen Koordinaten. Diese würde gleichzeitig aufdecken, wenn kein Schnittpunkt existiert, aber fälschlich einer berechnet wurde. Daher ist diese Probe unverzichtbar.

Häufig kann jeweils der andere Festpunkt als Anschlusspunkt für die Richtungsmessung genutzt werden. Man spricht dann von einem **Vorwärtsschnitt mit Gegensicht**. Die Berechnung über das Dreieck ABN kann hier so erfolgen, dass die Innenwinkel α und β direkt aus den Richtungen und schließlich

$$t_{\mathrm{AN}} = t_{\mathrm{AB}} \pm \alpha, \quad t_{\mathrm{BN}} = 200\ \mathrm{gon} + t_{\mathrm{AB}} \pm \beta$$

berechnet werden. Ein Vorteil ergibt sich dadurch nicht.

Bei dieser Variante ist Vorsicht geboten: Leicht wird der falsche Schnittpunkt berechnet, indem das Vorzeichen vor den Innenwinkeln falsch gewählt wird. Sie wird deshalb nicht empfohlen.

Eine weitere Variante ist der **Seitwärtseinschnitt**, bei dem die Richtungsmessungen nicht auf B, sondern auf N erfolgen. Voraussetzung ist, dass von A nach B die Gegensicht gemessen wurde. Dann kann der Winkel β über die Innenwinkelsumme im Dreieck ABN berechnet werden, und der Rest der Berechnung läuft wie beschrieben ab.

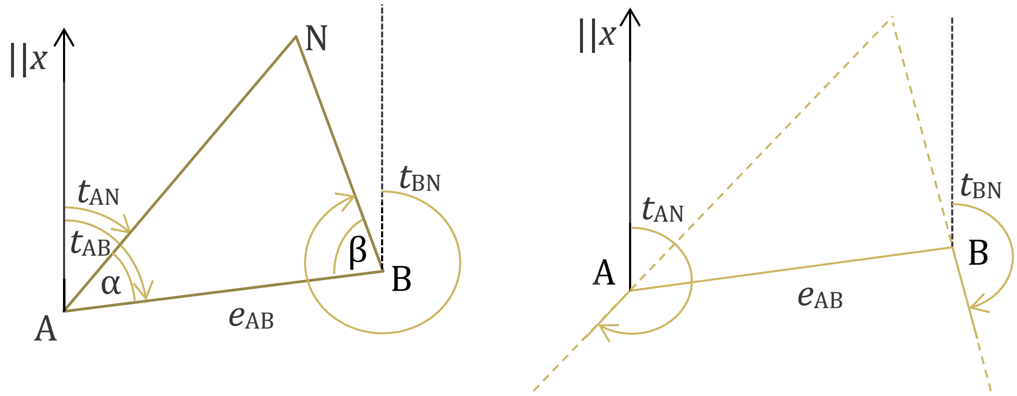


Abbildung 23: Berechnung des Vorwärtsschnitts (rechts: Es existiert kein Schnitt)

Sind die zu schneidenden Strahlen fast parallel, ist der Schnittpunkt schlecht definiert. Es kommt zu einer Verstärkung von Messabweichungen und Rundungsfehlern. Die Probe wird i.d.R. schlecht erfüllt sein.

Beispiel 16: Mit den Festpunkten A,B,C aus Aufgabe 4 und zu einem Neupunkt N wurden folgende Richtungen gemessen:

r_{AC} = 0,000 gon r_{BC} = 0,000 gon
r_{AN} = 56,767 gon r_{BN} = 257,547 gon

Berechnen Sie die Koordinaten von N.

Lösung über die direkten Formeln: Anhand einer grob maßstäblichen Skizze erkennt man, dass ein Schnittpunkt existiert. In der Lösung zu Aufgabe 4 hatten wir bereits t_{AC} = 90,309 gon und t_{BC} = 22,679 gon ermittelt. Darüber können wir die Richtungssätze orientieren und erhalten t_{AN} = 147,076 gon und t_{BN} = 280,226 gon. Einsetzen in die direkten Formeln liefert (Einheit Meter bei Festpunktkoordinaten weggelassen)

$$x_N = 337{,}45 + \frac{(597{,}65 - 432{,}29) - (218{,}08 - 337{,}45)\tan 280{,}226\text{ gon}}{\tan 147{,}076\text{ gon} - \tan 280{,}226\text{ gon}} = \underline{209{,}89\text{ m}}$$

$$y_N = 432{,}29 + (209{,}89 - 337{,}45)\tan 147{,}076\text{ gon} = \underline{572{,}14\text{ m}}$$

Probe: Vertauschen von A und B liefert

$$x_N = 218{,}08 + \frac{(432{,}29 - 597{,}65) - (337{,}45 - 218{,}08)\tan 147{,}076\text{ gon}}{\tan 280{,}226\text{ gon} - \tan 147{,}076\text{ gon}} = 209{,}89\text{ m} \checkmark$$

$$y_N = 597{,}65 + (209{,}89 - 218{,}08)\tan 280{,}226\text{ gon} = 572{,}14\text{ m} \checkmark$$

Lösung über das Dreieck ABN: In der Lösung zu Aufgabe 4 hatten wir bereits e_{AB} = 203,944 m und t_{AB} = 139,805 gon ermittelt. t_{AN} = 147,076 gon und t_{BN} = 280,226 gon hatten wir bereits in der Lösung über die direkten Formeln berechnet. Als Differenzen der Richtungswinkel ergeben sich

α = |139,805 – 147,076| gon = 7,271 gon
β = |339,805 – 280,226| gon = 59,579 gon

Wegen α + β < 200 gon existiert ein Schnittpunkt. Der Sinussatz liefert

$$\mathrm{AN} = 203{,}944\ \frac{\sin(59{,}579\ \mathrm{gon})}{\sin(7{,}271\ \mathrm{gon} + 59{,}579\ \mathrm{gon})} = 189{,}285\ \mathrm{m}$$

und das Polare Anhängen ergibt schließlich

$$y_N = 432{,}29\ \mathrm{m} + 189{,}285\ \mathrm{m} \cdot \sin(147{,}076\ \mathrm{gon}) = \underline{572{,}14\ \mathrm{m}}$$

$$x_N = 337{,}45\ \mathrm{m} + 189{,}285\ \mathrm{m} \cdot \cos(147{,}076\ \mathrm{gon}) = \underline{209{,}89\ \mathrm{m}}$$

Probe: Dasselbe über B ergibt

$$\mathrm{BN} = 203{,}944\ \mathrm{m}\ \frac{\sin(7{,}271\ \mathrm{gon})}{\sin(7{,}271\ \mathrm{gon} + 59{,}579\ \mathrm{gon})} = 26{,}794\ \mathrm{m}$$

$$y_N = 597{,}65\ \mathrm{m} + 26{,}794\ \ \mathrm{m} \cdot \sin(280{,}226\ \mathrm{gon}) = 572{,}14\ \mathrm{m}\ ✓$$

$$x_N = 218{,}08\ \mathrm{m} + 26{,}794\ \ \mathrm{m} \cdot \cos(280{,}226\ \mathrm{gon}) = 209{,}89\ \mathrm{m}\ ✓$$

Probe: Über die zweite Grundaufgabe (↗Abschnitt 2.3) kann in beiden Lösungen

$$t_{AN} = \arctan\frac{572{,}14 - 432{,}29}{209{,}89 - 337{,}45} = 147{,}076\ ✓$$

$$t_{BN} = \arctan\frac{572{,}14 - 597{,}65}{209{,}89 - 218{,}08} = 280{,}223\ ✓$$

berechnet werden. Wenn die Quadrantenregel des Arkustangens beachtet wurde, würden im Fall, dass kein Schnittpunkt existiert, beide Richtungswinkel um 200 gon falsch erhalten.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel16

Hinweis: Wenn man die Hilfsgrößen α,β,AN,BN nicht sowieso benötigt oder zur Verfügung hat, geht die Lösung über die direkten Formeln schneller.

5.3 ANWENDUNG: GERADENSCHNITT

Eine Grundaufgabe nicht nur der Geodäsie ist es, zwei Geraden durch je zwei gegebene Punkte A(y_A,x_A),B(y_B,x_B) und C(y_C,x_C),D(y_D,x_D) zu konstruieren und den Schnittpunkt N(y_N,x_N) zu berechnen. Der Schnittpunkt ist eindeutig, sofern die Geraden nicht parallel sind. Der Geradenschnitt kann auf einen Vorwärtsschnitt zurückgeführt werden.

Die Berechnung des Geradenschnitts ist wie die des Vorwärtsschnitts auf zwei verschiedene Arten möglich [G&J 4.1.6]:

Berechnung über die direkten Formeln des Vorwärtsschnitts (empfohlen):

1. Aus den Koordinaten von A,B,C,D berechnet man die Richtungswinkel t_{AB} und t_{CD}.
2. Von A und C aus führt man unter Benutzung der direkten Formeln einen Vorwärtsschnitt mit diesen Richtungswinkeln durch. Die Probe erfolgt wie beim Vorwärtsschnitt.
3. **Probe**: Die Rechnung wird von B und D aus wiederholt.

Berechnung über das Dreieck ACN:

1. Aus den Koordinaten von A,B,C,D berechnet man die Richtungswinkel t_{AB} und t_{CD} sowie die Strecke e_{AC}.
2. Im Dreieck ACN berechnet man einen Vorwärtsschnitt über Sinussatz und Polares Anhängen. Die Probe erfolgt wie beim Vorwärtsschnitt.
3. Weitere **Probe**: Die Rechnung wird im Dreieck BDN wiederholt.

Berechnung über die Geradengleichungen:

1. Für beide Geraden werden die Geradengleichungen aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \tau_1 \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \tau_2 \cdot \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$$

2. Es entsteht ein lineares Gleichungssystem, das mit den Standardverfahren nach den Unbekannten x_N, y_N, τ_1, τ_2 gelöst wird.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_A - x_B & 0 \\ 0 & 1 & y_A - y_B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_C - x_D \\ 0 & 1 & 0 & y_C - y_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

3. **Probe**: Einsetzen der Unbekannten in die Geradengleichungen.
4. x_N, y_N sind die gesuchten Schnittpunktkoordinaten.

Eine **universelle** alternative oder zusätzliche **Probe** kann darin bestehen, aus den endgültigen Koordinaten von N die Richtungswinkel zu allen vier Punkten A,B,C,D zu berechnen. Diese müssen mit t_{AB} und t_{CD} bzw. den Gegenrichtungswinkeln übereinstimmen.

Die Proben des Vorwärtsschnitts decken nicht auf, wenn t_{AB} oder t_{CD} oder e_{AC} falsch berechnet wurden. Deshalb eignen sich die oben angegebenen Proben besser oder sind zusätzlich nötig.

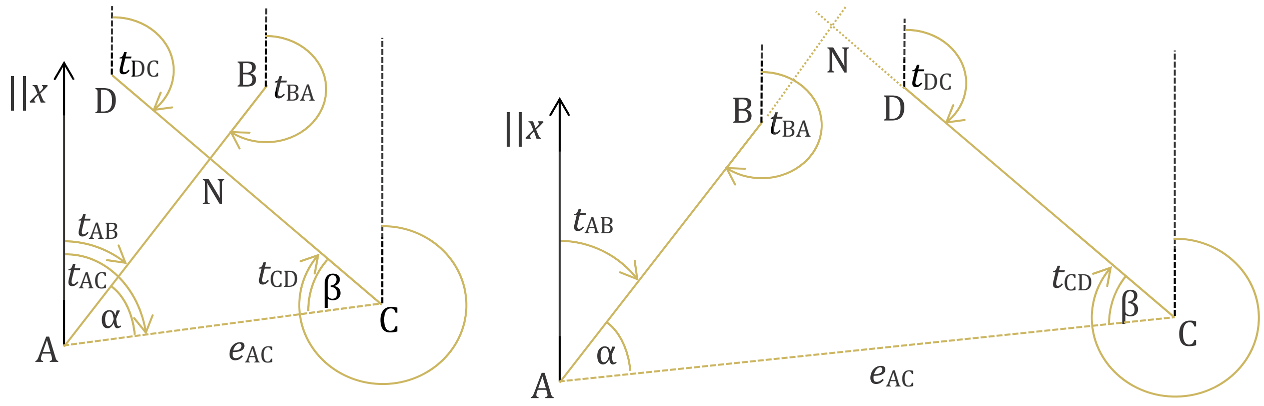


Abbildung 24: Geradenschnitt (Schnittpunkt N kann zwischen den Punkten liegen oder auch nicht)

Sind die zu schneidenden Geraden fast parallel, ist der Schnittpunkt schlecht definiert. Es kommt zu einer Verstärkung von Messabweichungen und Rundungsfehlern. Die Probe wird i.d.R. schlecht erfüllt sein.

Aufgabe 22: Berechnen Sie für die Punkte aus Aufgabe 14 den Schnittpunkt N der Geraden AB und CD.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe22

5.4 ANWENDUNG: KREIS DURCH DREI PUNKTE

Eine Grundaufgabe nicht nur der Geodäsie ist es, einen Kreis durch drei gegebene Punkte A(y_A,x_A),B(y_B,x_B),C(y_C,x_C) auf der Kreisperipherie zu konstruieren, d.h. den Mittelpunkt M und den Radius r zu bestimmen. Dabei schließen wir aus, dass A,B,C alle auf derselben Geraden liegen. Es gibt zwei Berechnungsmöglichkeiten:

Berechnung über den Radius des Umkreises und einen Bogenschnitt:

Diese Variante nutzt aus, dass M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist.

1. Aus den Koordinaten von A,B,C berechnet man die Länge einer Dreiecksseite und einen gegenüberliegenden Innenwinkel von Dreieck ABC.
2. Wie in der Probe zu Beispiel 12 berechnet man daraus den Umkreisradius r:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

3. **Probe**: Dasselbe berechnet man für eine andere Dreiecksseite und den gegenüberliegenden Innenwinkel von Dreieck ABC.
4. Von zwei Punkten A,B oder B,C oder A,C aus berechnet man den Bogenschnitt (↗Abschnitt 5.1) jeweils mit den Bogenradien *r* und erhält zwei Lösungen M_1 und M_2.
5. Von M_1 und M_2 wird derjenige Punkt identifiziert, bei dem der Abstand zum dritten Punkt gleich dem gesuchten Radius *r* ist. Das ist gleichzeitig eine **Probe**.

Berechnung über die Seitenmittelpunkte und einen Vorwärtsschnitt:

Diese Variante nutzt aus, dass M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC ist.

1. Auf zwei Seiten des Dreiecks ABC werden die Seitenmittelpunkte P,Q berechnet.
2. Von diesen beiden Seiten werden die Richtungswinkel berechnet.
3. Diese werden um 100 gon geändert (gleichgültig, ob + oder –), so dass die Richtungswinkel der Mittelsenkrechten entstehen.
4. Von P und Q wird ein Vorwärtsschnitt (↗ Abschnitt 5.2) mit diesen Richtungswinkeln berechnet. Dabei ist es egal, ob der Schnitt in Richtung der Strahlen erfolgt oder entgegengesetzt, sozusagen „nach hinten". (Man wendet am besten die direkten Formeln nach Abschnitt 5.2 an. Der Schnittpunkt ist M.
5. **Probe**: Man berechnet die Strecken AM,BM,CM. Diese müssen alle drei gleich lang sein. Ihre Länge ist der gesuchte Radius *r*.
6. **Alternative Probe**: Wird *r* nicht benötigt, kann man auch den dritten Seitenmittelpunkt und den Richtungswinkel der dritten Mittelsenkrechten berechnen. Jetzt kann man einen zweiten Vorwärtsschnitt berechnen. Dabei müssen dieselben Koordinaten M erhalten werden.

⚠ *Ist das Dreieck ABC sehr spitzwinklig, dann ist der Umkreis schlecht definiert. Es entstehen große Rundungsfehler und die Probe wird i.d.R. schlecht erfüllt sein. Liegen A,B,C sogar auf einer Geraden, so müsste eine Division durch Null folgen. Oft wird wegen Rundungsfehlern aber nur ein extrem großer Radius erhalten. Möchte man nur Zwischenpunkte auf dem Bogen durch A,B,C berechnen, so werden diese trotzdem korrekt erhalten.*

Beispiel 17: Wir berechnen den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte A,B,C aus Aufgabe 4.

Lösung über den Radius des Umkreises und einen Bogenschnitt: Aus der Lösung zu Aufgabe 4 entnimmt man die Seiten von Dreieck ABC und berechnet dessen Innenwinkel zu 49,496 gon, 82,874 gon und 67,630 gon. Daraus berechnet man den Radius

$$r = \frac{203{,}94\ \text{m}}{2 \cdot \sin(67{,}630\ \text{gon})} = 116{,}738\ \text{m}$$

und dasselbe nochmal für eine andere Kombination aus Seite und Winkel:

$$r = \frac{163{,}78\ \text{m}}{2 \cdot \sin(49{,}496\ \text{gon})} = 116{,}738\ \text{m}\ \checkmark$$

Im Dreieck ABM haben wir die drei Seiten und erhalten daraus den Innenwinkel bei A zu 32,370 gon. Daraus ergeben sich zwei mögliche Richtungswinkel:

$$t_{\text{AM1}} = (139{,}805+32{,}370)\ \text{gon} = 172{,}175\ \text{gon}$$
$$t_{\text{AM2}} = (139{,}805-32{,}370)\ \text{gon} = 107{,}435\ \text{gon}$$

Polares Anhängen an A liefert die beiden möglichen Mittelpunkte M_1 und M_2 mit

$$y_{\text{M1}} = 432{,}29\ \text{m} + 116{,}738\ \text{m} \cdot \sin(172{,}175\ \text{gon}) = 481{,}70\ \text{m}$$
$$x_{\text{M1}} = 337{,}45\ \text{m} + 116{,}738\ \text{m} \cdot \cos(172{,}175\ \text{gon}) = 231{,}69\ \text{m}$$
$$y_{\text{M2}} = 432{,}29\ \text{m} + 116{,}738\ \text{m} \cdot \sin(107{,}435\ \text{gon}) = 548{,}24\ \text{m}$$
$$x_{\text{M2}} = 337{,}45\ \text{m} + 116{,}738\ \text{m} \cdot \cos(107{,}435\ \text{gon}) = 323{,}84\ \text{m}$$

Die Berechnung von deren Abständen zum Punkt C und Vergleich mit dem Radius ergeben

$$e_{\text{M1C}} = 222{,}536\ \text{m} \neq r \qquad \text{und} \qquad e_{\text{M2C}} = 116{,}733\ \text{m} = r\ \checkmark.$$

Letzteres ist gleichzeitig die **Probe**. Somit ist M_2 der gesuchte Punkt M:

$$y_{\text{M}} = \underline{548{,}24\ \text{m}}, \qquad x_{\text{M}} = \underline{323{,}84\ \text{m}}$$

Lösung über die Seitenmittelpunkte und einen Vorwärtsschnitt: Die Seitenmittelpunkte P und Q von AB und BC haben die Koordinaten

$$y_{\text{P}} = (432{,}29\ \text{m} + 597{,}65\ \text{m})/2 = 514{,}970\ \text{m}$$
$$x_{\text{P}} = (337{,}45\ \text{m} + 218{,}08\ \text{m})/2 = 277{,}765\ \text{m}$$
$$y_{\text{Q}} = (597{,}65\ \text{m} + 654{,}77\ \text{m})/2 = 626{,}210\ \text{m}$$
$$x_{\text{Q}} = (218{,}08\ \text{m} + 371{,}58\ \text{m})/2 = 294{,}830\ \text{m}$$

Die Richtungswinkel der Dreiecksseiten werden um 100 gon geändert und ergeben die Richtungswinkel der Mittelsenkrechten:

$$t_{\text{PM}} = 39{,}805\ \text{gon} \qquad t_{\text{QM}} = 122{,}679\ \text{gon}$$

Damit erhalten wir für den Vorwärtsschnitt von P und Q aus (Einheit Meter bei Festpunktkoordinaten weggelassen):

$$x_M = 277{,}765 + \frac{(626{,}210 - 514{,}970) - (294{,}830 - 277{,}765)\tan 122{,}679\text{ gon}}{\tan 39{,}805\text{ gon} - \tan 122{,}679\text{ gon}}$$
$$= \underline{323{,}85\text{ m}}$$

$$y_M = 514{,}970\text{ m} + (323{,}850\text{ m} - 277{,}765\text{ m})\tan 39{,}805\text{ gon} = \underline{548{,}24\text{ m}}$$

Der erhaltene Schnittpunkt M ist automatisch der Richtige. Den Radius des Kreises liefert die **Probe**:

e_{AM} = 116,745 m ; e_{BM} = 116,742 m ; e_{CM} = 116,734 m ✓

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel17

5.5 SCHNITT GERADE – KREIS

Es gibt mehrere geodätische Problemstellungen, die geometrisch auf einen Schnitt von Gerade und Kreis hinaus laufen. Zwei sind in Abbildung 25 dargestellt.

Gegeben sind zwei Festpunkte A(y_A,x_A),M(y_M,x_M).
Gemessen wurde die Strecke e_{NM} .
Variante a) Gemessen wurden zusätzlich die Richtungen r_{AB},r_{AM} auf dem Punkt A.
Variante b) Gegeben ist zusätzlich der Festpunkt B(y_B,x_B).
Gesucht ist der Neupunkt N(y_N,x_N) auf dem Strahl AB, dessen Koordinaten zu bestimmen sind. Man kann die Bestimmung von N als Schnitt des Strahls AB mit dem Kreis um M mit dem Radius e_{NM} auffassen.

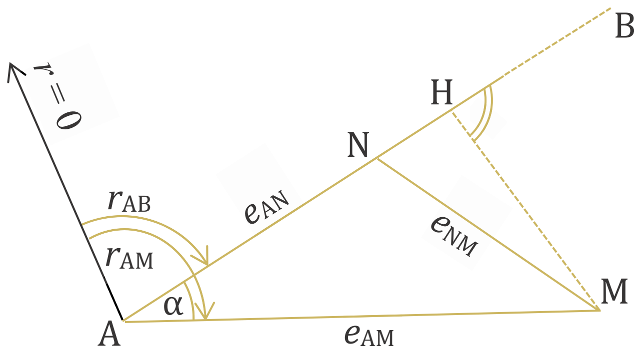


Abbildung 25: Schnitt Gerade Kreis

Zwei Berechnungen sind möglich:

Berechnung über das Dreieck AMN:

1. Aus den Festpunktkoordinaten werden der Richtungswinkel t_{AM} und die Strecke e_{AM} berechnet.

2. Der Richtungswinkel $t_{AN} = t_{AB}$ wird berechnet aus $t_{AB} = t_{AM} - r_{AM} + r_{AB}$ (Variante a) oder aus Koordinaten von A und B (Variante b).
3. Der Innenwinkel $\alpha = |t_{AM} - t_{AN}|$ wird berechnet.
4. Im Dreieck AMN liegt die Situation SSW (↗Tabelle 1) vor. Daraus ergibt sich e_{AN}, jedoch möglicherweise nicht eindeutig (↗Abbildung 2).
5. Durch Polares Anhängen von N an A werden die Koordinaten von N oder bei Zweideutigkeit von N_1 und N_2 erhalten.
6. **Probe**: α und e_{NM} werden aus endgültigen Koordinaten von N oder N_1 und N_2 zurückgerechnet.

Berechnung über die Geraden- und Kreisgleichung:

Diese Berechnung erläutern wir nur für Variante b.

1. Für die Gerade AB wird die Geradengleichung in Parameterform aufgestellt:
$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$
2. Für den Kreis um M wird die Kreisgleichung aufgestellt:
$$(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = e_{MN}^2$$
3. Die Geradengleichung wird in die Kreisgleichung eingesetzt:
$$(x_A + \tau \cdot (x_B - x_A) - x_M)^2 + (y_A + \tau \cdot (y_B - y_A) - y_M)^2 = e_{MN}^2$$
4. Die entstehende Gleichung ist eine quadratische Gleichung für τ und wird gelöst. Normalerweise sind Lösungen $\tau<0$ zu verwerfen.
5. Die Lösung(en) setzt man in die Geradengleichung ein und erhält die Koordinaten von N oder bei Zweideutigkeit von N_1 und N_2.
6. **Probe**: Einsetzen von $N(y_N, x_N)$ in die Kreisgleichung.

Im Fall der Zweideutigkeit kann die richtige Lösung nur anhand von zusätzlichen Informationen, z.B. Näherungskoordinaten von N oder weitere Messungen identifiziert werden. Sollte gar keine Lösung existieren, liegt ein Irrtum oder grober Messfehler vor und wurde auf diese Weise aufgedeckt.. Die verschiedenen Situationen der Eindeutigkeit bzw. Nichteindeutigkeit sind in Abbildung 26 dargestellt.

Auch hier ist ein ungünstiger Schnitt möglich, nämlich wenn MN auf AB nahezu senkrecht steht. Es entstehen große Rundungsfehler und die Probe wird i.d.R. schlecht erfüllt sein. Außerdem kann es sein, dass trotz Näherungskoordinaten unklar bleibt, welches der richtige Schnittpunkt ist.

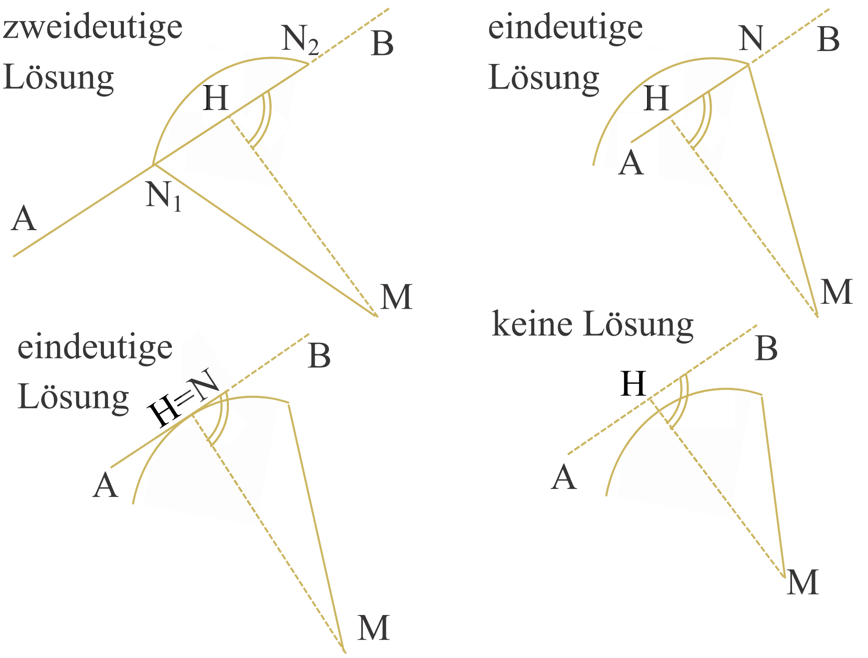


Abbildung 26: Eindeutigkeit bzw. Nichteindeutigkeit beim Schnitt Gerade - Kreis

Beispiel 18: Von einem bekannten Standpunkt S aus wurden mit einem Tachymeter die Eckpunkte A,B eines Gebäudes mit rechteckigem Grundriss ABCD angezielt. Dabei sind die folgenden Koordinaten gegeben und Richtungen gemessen:

Punkt	Nord [m]	Ost [m]	Zielpunkt	Hz-Richtung [gon]
S	16,10	17,11	A	9,648
A	63,19	23,06	B	23,466

Mit Messband wurden die Gebäudeumringmaße (Hz-Strecken) AB zu 17,05 m und BC zu 14,02 m ermittelt. Berechnen Sie die Koordinaten der restlichen drei Gebäudeeckpunkte B,C,D.

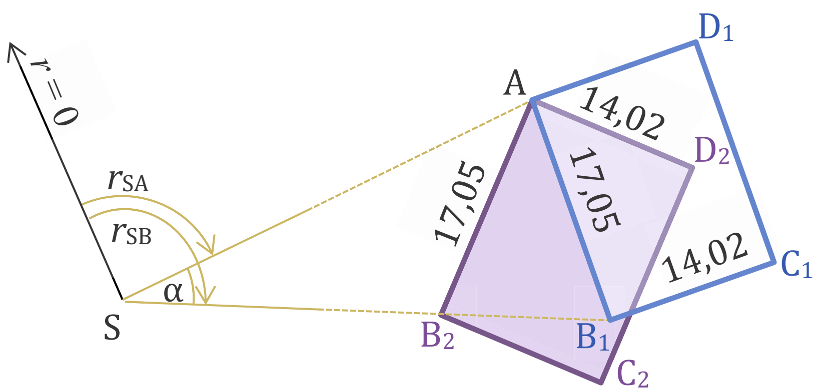


Abbildung 27: zu Beispiel 18

Lösung: Alle folgenden Größen haben die Einheiten Meter oder Gon. Aus den Koordinaten von A und S ermitteln wir zunächst t_{SA} = 8,002 und e_{SA} = 47,464. Weiter erhält man den Innenwinkel α = 23,466–9,648 =13,818 und den Richtungswinkel t_{SB} = 8,002+ 13,818 = 21,820.

Im Dreieck SAB wenden wir die Berechnungsmethode SSW an: Der Sinussatz ergibt zwei Lösungen, nämlich

$$\beta = \arcsin\left(\frac{47{,}464}{17{,}05}\sin(13{,}818)\right) = 40{,}927 \text{ oder } 159{,}073$$

Die Strecke SB ergibt

$$e_{SB_1} = \frac{\sin(13{,}818 + 40{,}927)}{\sin(40{,}927)} 47{,}464 = 59{,}997$$

$$e_{SB_2} = \frac{\sin(13{,}818 + 159{,}073)}{\sin(159{,}073)} 47{,}464 = 32{,}704$$

Beide Strecken sind positiv, so dass das Ergebnis zweideutig ist. Polares Anhängen an S liefert die Lösungen B_1 und B_2:

$$y_{B_1} = 17{,}11 + 59{,}997 \cdot \sin(21{,}820) = \underline{37{,}274}$$

$$x_{B_1} = 16{,}10 + 59{,}997 \cdot \cos(21{,}820) = \underline{72{,}607}$$

$$y_{B_2} = 17{,}11 + 32{,}704 \cdot \sin(21{,}820) = \underline{28{,}101}$$

$$x_{B_2} = 16{,}10 + 32{,}704 \cdot \cos(21{,}820) = \underline{46{,}902}$$

Die beiden Richtungswinkel t_{AB_1} und t_{AB_2} berechnet man über den Innenwinkel

$$t_{AB_1} = 8{,}002 + 40{,}927 + 13{,}818 = 62{,}747$$

$$t_{AB_2} = 8{,}002 + 159{,}073 + 13{,}818 = 180{,}893$$

Die Richtungswinkel $t_{B_1C_1} = t_{AD_1}$ und $t_{B_2C_2} = t_{AD_2}$ erhält man durch Subtrahieren von je 100 gon von t_{AB_1} und t_{AB_2}. Die Punkte C_1, D_1, C_2, D_2 erhält man dann durch Polares Anhängen an A, B_1 und B_2. Das Ergebnis ist

Punkt	Nord [m]	Ost [m]	Punkt	Nord [m]	Ost [m]
C_1	<u>84,294</u>	<u>29,530</u>	C_2	<u>51,047</u>	<u>41,494</u>
D_1	<u>74,877</u>	<u>15,316</u>	D_2	<u>67,335</u>	<u>36,453</u>

Probe: Man hängt die Punkte B_1 und B_2 auch an A an:

$$y_{B_1} = 23{,}06 + 17{,}05 \cdot \sin(62{,}747) = 37{,}273 \checkmark$$

$$x_{B_1} = 63{,}19 + 17{,}05 \cdot \cos(62{,}747) = 72{,}607 \checkmark$$

$$y_{B_2} = 23{,}06 + 17{,}05 \cdot \sin(180{,}893) = 28{,}101 \checkmark$$

$$x_{B_2} = 63{,}19 + 17{,}05 \cdot \cos(180{,}893) = 46{,}902 \checkmark$$

Weitere **Probe**: Die Strecken C_1D_1 und C_2D_2 betragen jeweils 17,050 ✓.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel18

Aufgabe 23: Ein Schiff fährt von Bastia (F) nach La Spezia (I). Unterwegs werden Signale eines Funkfeuers in Livorno empfangen. Aus der Signalstärke wird auf einen Abstand zum Sender von 90 km geschlossen. Die Koordinaten im System UTM 32T betragen

Punkt	Nord [km]	Ost [km]
Bastia	4728	537
La Spezia	4884	566
Livorno	4823	606

Nehmen Sie einen geradlinigen Kurs in der UTM-Karte an. Berechnen Sie die aktuelle Position des Schiffes. (Versuchen Sie auch die Berechnung über Geraden- und Kreisgleichung. Hinweis: Die sogenannte UTM-Projektionsverzerrung liegt im Bereich von höchstens wenigen Zentimetern und kann hier vernachlässigt werden.)

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe23

5.6 RÜCKWÄRTSSCHNITT

In der Ebene kann ein Neupunkt N(y_N,x_N) aus drei gemessenen Richtungen r_{NA} , r_{NM} und r_{NB} von N zu drei Festpunkten A(y_A,x_A), M(y_M,x_M) und B(y_B,x_B) bestimmt werden. Wir gehen davon aus, dass die Punkte A,M,B von N aus gesehen im Uhrzeigersinn angeordnet sind und die Winkel $\alpha = r_{NM} - r_{NA}$ und $\beta = r_{NB} - r_{NM}$ beide im Intervall [0,200]gon liegen. Anderfalls müssen die Punktbezeichnungen entsprechend geändert werden.

Es handelt sich hierbei um einen **Schnitt** in folgendem Sinne:

1. Der geometrische Ort aller Punkte N, an denen die Strahlen zu A und M einen Winkel α einschließen, ist ein **Kreisbogen** über der Sehne AM mit dem Zentriwinkel 2α oder 400 gon–2α. Der Winkel ANM ist dann ein Peripheriewinkel der Größe α über der Sehne AM.
2. Der geometrische Ort aller Punkte N, an denen die Strahlen zu M und B einen Winkel β einschließen, ist ein **Kreisbogen** über der Sehne MB mit dem Zentriwinkel 2β oder 400 gon–2β. Der Winkel MNB ist dann ein Peripheriewinkel der Größe β über der Sehne MB.

Da M auf beiden Kreisen liegt, ist M ein Schnittpunkt dieser Kreise. Der gesuchte Punkt N muss ebenso auf beiden Kreisen liegen, ist also der andere Schnittpunkt dieser Kreise, sollten zwei existieren. Es ist aber möglich, dass sich zwar die Kreise schneiden, aber nicht die Kreisbögen, auf denen N liegen muss (↗ Abbildung 28 rechts oben). Das kann praktisch passieren, wenn ein grober Fehler oder Irrtum vorliegt. Er wurde auf diese Weise aufgedeckt.

Ein Sonderfall tritt ein, wenn beide **Kreise sich berühren**. Das passiert nur, wenn der Winkel AMB genau α+β beträgt. N und M müssen dann identische Punkte sein. Weil das beim praktischen Messen nicht vorkommt, muss ein Fehler unterlaufen sein.

Den Kreis durch A,M,B nennt man den **gefährlichen Kreis**. Liegt N auch auf diesem Kreis, so sind beide zu schneidenden Kreise identisch mit dem gefährlichen Kreis. Der Schnittpunkt ist nicht bestimmbar. Ein solcher Fall kann praktisch vorkommen, muss also sorgsam vermieden werden.

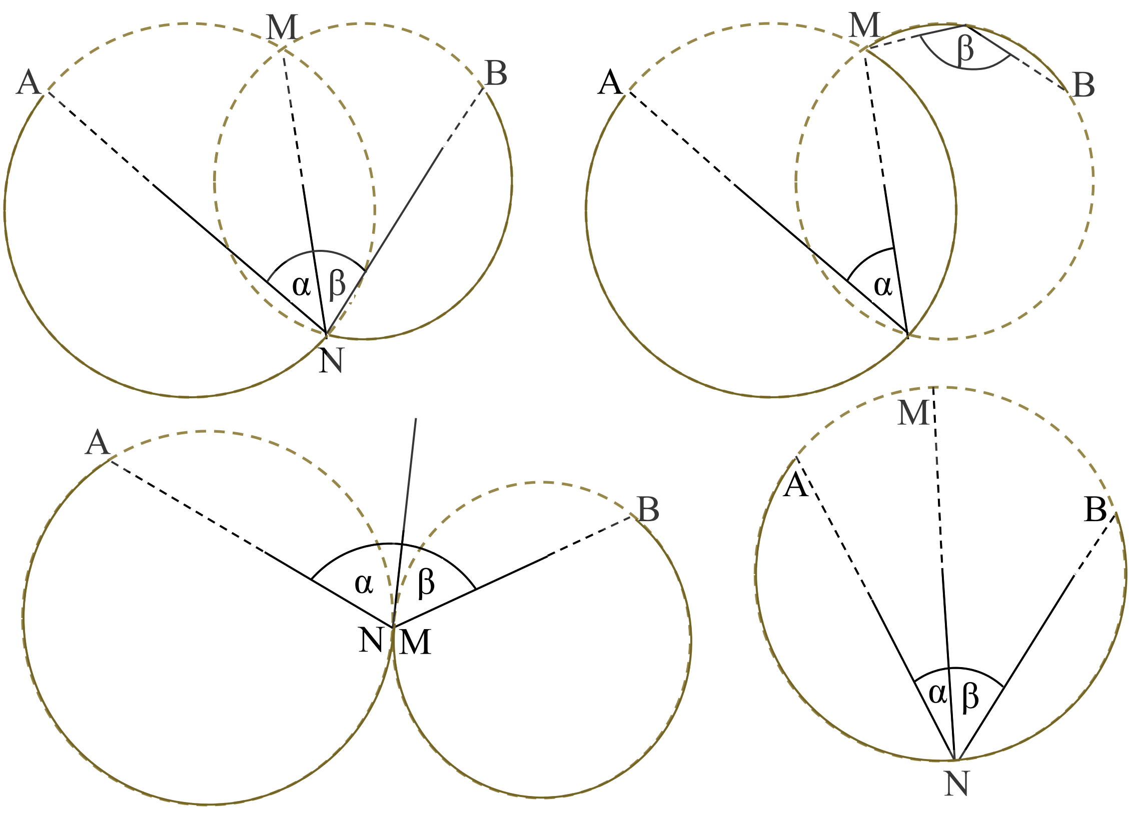


Abbildung 28: Rückwärtsschnitt (links oben: Normalfall, rechts oben: kein Schnitt existiert, links unten: Sonderfall „Winkel AMB = α+β“, rechts unten: Sonderfall „N auf gefährlichem Kreis“

Liegt N in der Nähe des gefährlichen Kreises, d.h. liegen die Punkte A,M,B,N fast auf einem Kreis, ist der Schnittpunkt der Kreise durch A,N,M und M,N,B schlecht definiert. Es kommt zu einer Verstärkung von Messabweichungen und Rundungsfehlern. Die Probe wird i.d.R. schlecht erfüllt sein.

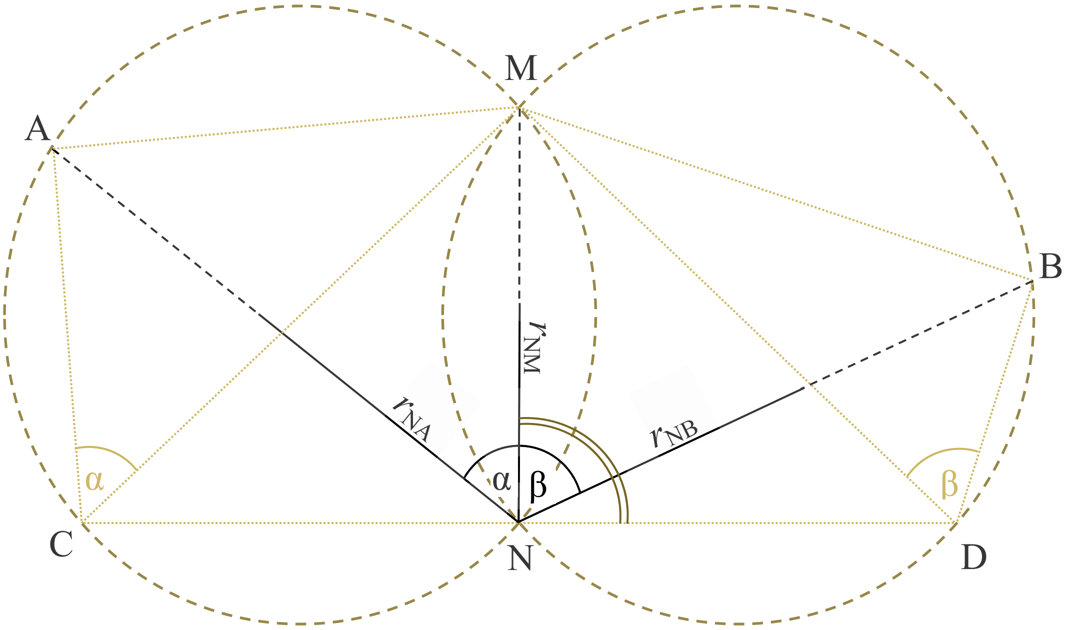


Abbildung 29: Rückwärtsschnitt mit Berechnung nach Cassini

Es gibt mehrere Lösungswege für den Rückwärtsschnitt. Hier finden Sie nur die

Berechnung nach Cassini: [G&J 7.2.7]

1. Es werden zwei Hilfspunkte C und D berechnet, die auf den zu schneidenden Kreisen dem Punkt M jeweils diametral gegenüber liegen:
   $y_C = y_A + (x_M - x_A)\cdot\cot\alpha$ $\qquad$ $y_D = y_B + (x_B - x_M)\cdot\cot\beta$
   $x_C = x_A - (y_M - y_A)\cdot\cot\alpha$ $\qquad$ $x_D = x_B - (y_B - y_M)\cdot\cot\beta$
2. Aus diesen Koordinaten wird der Richtungswinkel t_{CD} berechnet.
3. Nach dem Satz des Thales sind die Winkel CNM und MND rechte Winkel. Deshalb liegen C,N und D auf einer Geraden, und MN steht senkrecht auf CD. Somit erhält man N aus dem Vorwärtsschnitt von C und M aus mit den Richtungswinkeln t_{CD} und t_{CD}±100 gon. Man beachte: tan(t_{CD}±100 gon) = -cot t_{CD}.

$$x_N = x_C + \frac{(y_M - y_C) + (x_M - x_C)\cdot\cot t_{CD}}{\tan t_{CD} + \cot t_{CD}}$$

$$y_N = y_C + (x_N - x_C)\cdot\tan t_{CD}$$

4. **Probe**: Man berechnet die Richtungswinkel t_{NA}, t_{NM} und t_{NB} aus Koordinaten und daraus dreimal den Orientierungswinkel des Richtungssatzes auf N (Stationsabriss). Alle drei Ergebnisse müssen gleich sein:
   $$t_{NA} - r_{NA} = t_{NM} - r_{NM} = t_{NB} - r_{NB}$$

Im Sonderfall „Winkel AMB = α+β“ wird N identisch mit M erhalten.

Im Fall, dass kein Schnitt existiert, wird trotzdem ein Punkt N berechnet. Die Probe stimmt allerdings nicht! Sie ist deshalb unverzichtbar, um diesen Fall auszuschließen.

Aufgabe 24: Überlegen Sie, was passiert, wenn Sie versuchen, die Berechnung nach Cassini auf den Fall anzuwenden, dass N auf dem gefährlichen Kreis liegt.

Beispiel 19: Auf Punkt P wurde folgender Richtungssatz zu drei gegebenen Festpunkten gemessen:

P	Hz [gon]
A	0,000
M	116,895
B	284,622
N	345,073

Punkt	y [m]	x [m]
A	209,13	193,40
M	420,68	639,27
B	578,47	198,38

Wir berechnen die Koordinaten von P. (N wird in Aufgabe 25 benötigt.)

Lösung nach Cassini: Zunächst erhält man α=116,895 gon und β=284,622 gon–116,895 gon=167,727 gon. Alle Werte ohne Einheit sind in Meter und Gon angegeben. Für die Hilfspunkte C und D erhält man

$$\begin{aligned}
y_C &= 209{,}13+(639{,}27-193{,}40)\cdot\cot 116{,}895 &&= 87{,}944\\
x_C &= 193{,}40-(420{,}68-209{,}13)\cdot\cot 116{,}895 &&= 250{,}899\\
y_D &= 578{,}47+(198{,}38-639{,}27)\cdot\cot 167{,}727 &&= 1372{,}363\\
x_D &= 198{,}38-(578{,}47-420{,}68)\cdot\cot 167{,}727 &&= 482{,}506
\end{aligned}$$

Der Richtungswinkel der Schnittgerade CD ergibt sich daraus zu t_{CD} = 88,642 gon.

$$x_P = 250{,}899 + \frac{(420{,}68 - 87{,}944) + (639{,}27 - 250{,}899)\cdot\cot 88{,}642}{\tan 88{,}642 + \cot 88{,}642} = \underline{321{,}239\ \mathrm{m}}$$

$$y_P = 87{,}944 + (321{,}239 - 250{,}899)\cdot\tan 88{,}642 = \underline{478{,}028\ \mathrm{m}}$$

Probe: Daraus erhält man die Richtungswinkel

t_{PA} =271,747 gon t_{PM} = 388,642 gon t_{PB} = 156,369 gon

und schließlich dreimal den Orientierungswinkel (Stationsabriss)

$t_{PA} - r_{PA}$ = 271,747 gon $t_{PM} - r_{PM}$ = 271,748 gon ✓ $t_{PB} - r_{PB}$ = 271,747 gon ✓

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel19

Aufgabe 25: Zusätzlich zu den gegebenen Größen aus Beispiel 19 wurden auf den Punkten Q und R folgende Richtungssätze gemessen:

Q	Hz [gon]	R	Hz [gon]
A	0,000	A	0,000
M	128,858	M	176,572

B	287,719	B	284,240
N	342,420	N	325,764

Berechnen Sie die Koordinaten von N.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe25

5.7 ANWENDUNG: RECHTECK DURCH FÜNF PUNKTE

Auf dem Rand eines Objektes mit rechteckigem Grundriss wurden 5 beliebige Punkte gemessen: auf einer Seite zwei Punkte A und B und auf den anderen Seiten je ein Punkt C, D und E (↗ Abbildung 30).

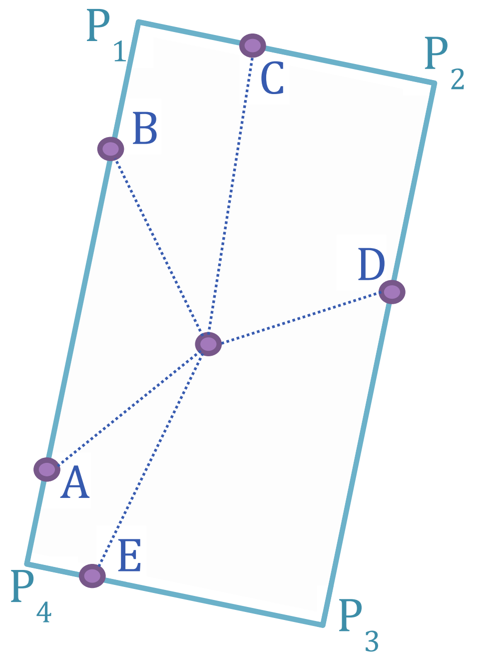


Abbildung 30: Rechteck durch fünf Punkte

Es gibt zunächst zwei Berechnungsvarianten, eine dritte wird in Abschnitt 6.7 vorgestellt:

Berechnung über vier Vorwärtsschnitte:

1. Aus den Koordinaten von A und B wird der Richtungswinkel t_{AB} berechnet.
2. Eckpunkt P_1 wird durch Vorwärtsschnitt von A oder B mit t_{AB} und von C mit t_{AB} ± 100 gon berechnet (ob „+“ oder „-“ spielt keine Rolle).
3. Eckpunkt P_2 wird durch Vorwärtsschnitt von C mit t_{AB} ± 100 gon und von D mit t_{AB} berechnet.
4. Eckpunkt P_3 wird durch Vorwärtsschnitt von D und E berechnet.
5. Eckpunkt P_4 wird durch Vorwärtsschnitt von E und A oder B berechnet

Berechnung über vier Rückwärtsschnitte:

1. Wir berechnen Eckpunkt P_1 durch Rückwärtsschnitt über A,B und C. Die Richtungen nach A und B wählen wir gleich groß, z.B. 100,000 gon, und nach C um 100 gon kleiner oder größer, je nachdem, ob A,B,C,D,E das Rechteck im Uhrzeigersinn durchlaufen (↗ Abbildung 30), oder entgegengesetzt.
2. Wir berechnen Eckpunkt P_2 durch Rückwärtsschnitt über P_1, C und D in entsprechender Weise.
3. Wir berechnen Eckpunkt P_3 durch Rückwärtsschnitt über P_2, D und E.
4. Wir berechnen Eckpunkt P_4 durch Rückwärtsschnitt über P_3, E und A oder B.

⚠ *Die Berechnung mit Rückwärtsschnitten ist mit Taschenrechner sicher weniger zu empfehlen. Auch sind hier im Gegensatz zur Berechnung mit Vorwärtsschnitten ungünstige Schnitte möglich.*

Probe: Aus den endgültigen Koordinaten der Eckpunkte berechnen wir die Richtungswinkel aller vier Seiten. Diese müssen t_{AB} und $t_{AB} \pm 100$ gon betragen.

Aufgabe 26: Berechnen Sie die Eckpunkte des Rechtecks (↗ Abbildung 30) durch die Punkte

Punkt	y [m]	x [m]
A	1,12	15,48
B	3,12	24,47
C	5,94	25,30
D	8,52	20,07
E	2,77	14,13

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=tutorial/rectfive&DecimalSeparator=Comma

6 EBENE KOORDINATENTRANSFORMATIONEN

6.1 ELEMENTARE TRANSFORMATIONSSCHRITTE

Ebene Koordinatentransformationen sind Abbildungen

von Punkten P(y,x) im kartesischen yx-System (Start- oder Quellsystem)

auf Punkte P(Y,X) im kartesischen YX-System (Zielsystem).

Oft gibt es Punkte, die in beiden Systemen denselben Namen und gegebene Koordinaten y,x,Y,X besitzen. Sie werden **identische Punkte** oder homologe Punkte oder Passpunkte genannt.

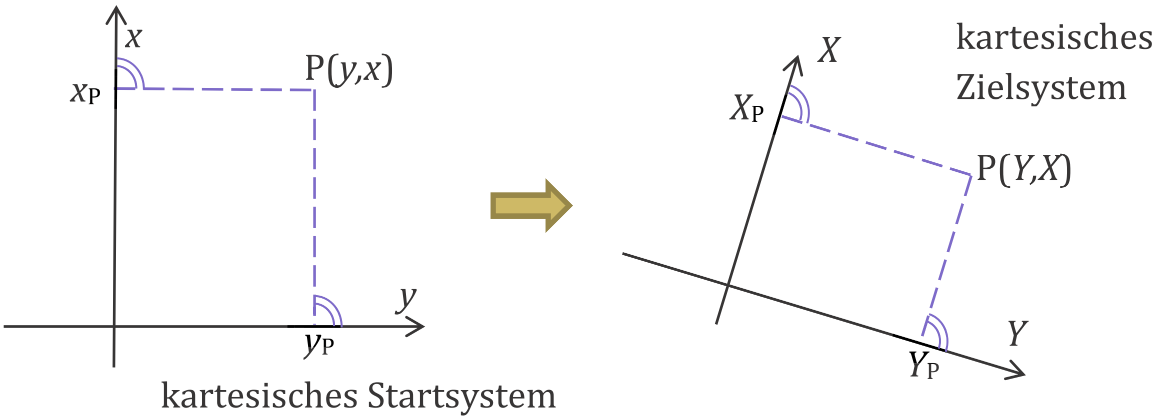


Abbildung 31: Ebene Koordinatentransformationen

Die Transformation P(y,x) → P(Y,X) kann man sich als Hintereinanderausführung verschiedener elementarer Transformationsschritte vorstellen:

① **Translation** (Verschiebung): Dieser Transformationsschritt wird durch zwei Translationsparameter Y_0 und X_0 bestimmt. Die Transformationsgleichungen lauten

$$Y = Y_0 + y$$
$$X = X_0 + x$$

Die Kongruenz von Original- und Bildfiguren bleibt bei dieser Transformation gewahrt. Die Parameter Y_0, X_0 sind die Koordinaten des Startsystemursprungs im Zielsystem.

Die Parameter können aus einem identischen Punkt P berechnet werden:

$$Y_0 = Y_P - y_P$$
$$X_0 = X_P - x_P$$

Die Parameter der Rücktransformation (Y,X) → (y,x) sind $-Y_0$ und $-X_0$.

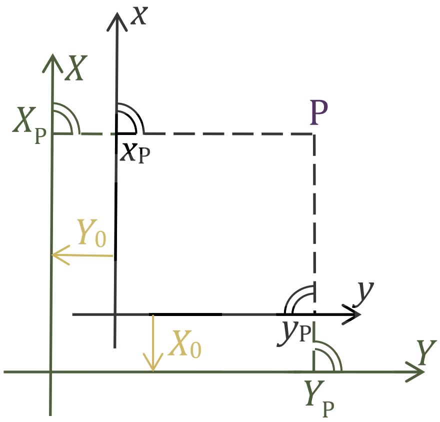


Abbildung 32: Translation (Verschiebung)

② **Rotation** (Drehung) um den Koordinatenursprung: Dieser Transformationsschritt wird durch einen Rotationsparameter (Drehwinkel) ε bestimmt. Die Transformationsgleichungen lauten

$$Y = x \cdot \sin \varepsilon + y \cdot \cos \varepsilon$$
$$X = x \cdot \cos \varepsilon - y \cdot \sin \varepsilon$$

Die Kongruenz von Original- und Bildfiguren bleibt bei dieser Transformation gewahrt.

Der Drehwinkel ε ist in Anlehnung an [G&J 8.1.1] hier im Sinne von Abbildung 33 definiert. Viele Autoren und Softwareentwickler definieren ε aber entgegengesetzt. Dann sind in den Transformationsgleichungen die Vorzeichen vor den Sinustermen gerade vertauscht, z.B. bei IN DUBIO PRO GEO.

Der Parameter ε kann aus einem identischen Punkt P≠O berechnet werden:

$$\varepsilon \ = T_{0P} - t_{0P} = \arctan\frac{Y_P}{X_P} - \arctan\frac{y_P}{x_P}$$

t_{0P} und T_{0P} sind die Richtungswinkel von O(0,0) nach P im Start- und Zielsystem. Der Parameter der Rücktransformation ist -ε.

Aufgabe 27: Überzeugen Sie sich, dass die angegebenen Transformationsgleichungen tatsächlich die gewünschte Drehung ausführen. Hinweis: Gehen Sie zu Polarkoordinaten (*e*,*t*) über und berücksichtigen Sie die Additionstheoreme der Winkelfunktionen [G&J 2.5.3].

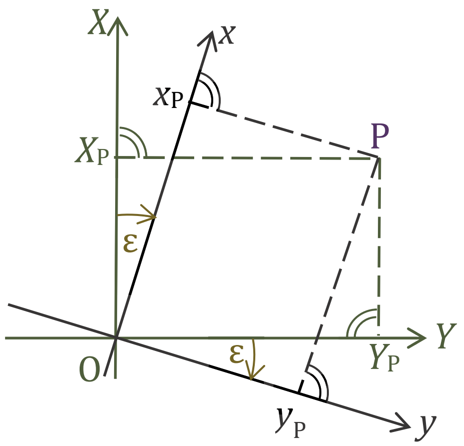


Abbildung 33: Rotation (Drehung)

③ **Eine Skalierung** (Maßstabsänderung): Dieser Transformationsschritt wird durch einen Skalenparameter (Maßstab) m>0 bestimmt. Die Transformationsgleichungen lauten

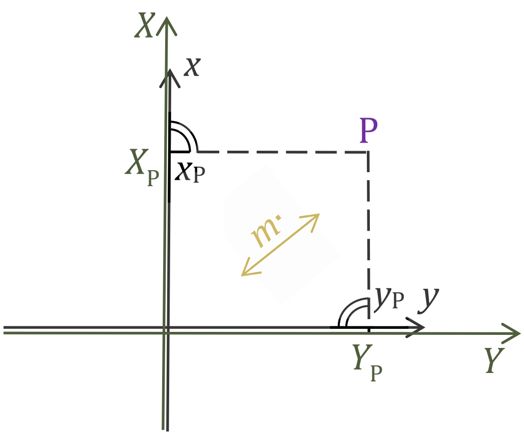
$$Y = m \cdot y$$
$$X = m \cdot x$$

Der Koordinatenursprung bleibt fest. Die Kongruenz von Original- und Bildfiguren geht bei dieser Transformation verloren, aber die geometrische Ähnlichkeit bleibt gewahrt. Insbesondere bleiben alle Winkel erhalten und Kreise bleiben Kreise.

Der Parameter kann aus einem identischen Punkt P≠O berechnet werden:

$$m = Y_P \,/\, y_P \quad \text{oder} \quad m = X_P \,/\, x_P$$

Der Parameter der Rücktransformation ist $1/m$.



④ **Zwei Skalierungen** (Maßstabsänderungen): Dieser Transformationsschritt wird durch zwei Skalenparameter (Maßstäbe) m_y>0 und m_x>0 bestimmt. Die Transformationsgleichungen lauten

$$Y = m_y \cdot y$$
$$X = m_x \cdot x$$

Der Koordinatenursprung bleibt fest. Kongruenz und Ähnlichkeit von Original- und Bildfiguren gehen bei dieser Transformation verloren, aber parallele Geraden bleiben parallel. Kreise werden zu Ellipsen deformiert. Die Parameter können als getrennte Maßstäbe der Achsen interpretiert werden (m_y = Maßstab der y-Achse, m_x = Maßstab der x-Achse).

Die Parameter können aus einem identischen Punkt P berechnet werden, der nicht auf einer Achse des Startsystems liegen darf:

$$m_y = Y_P \,/\, y_P \quad \text{und} \quad m_x = X_P \,/\, x_P$$

Die Parameter der Rücktransformation sind $1/m_y$ und $1/m_x$.

⑤ **Transvektion** (Scherung): Dieser Transformationsschritt wird durch zwei Transvektionsparameter (Scherungsparameter) α,β bestimmt. Die Transformationsgleichungen lauten

$$Y = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\beta$$
$$X = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\beta$$

Der Koordinatenursprung bleibt fest. Kongruenz und Ähnlichkeit von Original- und Bildfiguren gehen bei dieser Transformation verloren, aber parallele Geraden bleiben parallel. Kreise werden zu Ellipsen deformiert. Die Parameter können als Drehwinkel der Achsen des Startsystems interpretiert werden (β = Drehwinkel der y-Achse, α = Drehwinkel der x-Achse). Die Transvektion enthält die Rotation als Spezialfall, wenn α = β gilt.

⚠ *Die Scherwinkel α und β können genauso wie der Drehwinkel ε entgegengesetzt definiert werden. Das ist z.B. bei IN DUBIO PRO GEO der Fall. Dann sind in den Transformationsgleichungen die Vorzeichen vor den Sinustermen gerade vertauscht.*

Die Parameter α,β können aus einem identischen Punkt P berechnet werden, der nicht auf einer Achse des Startsystems liegen darf. Dazu schreibt man die beiden Transformationsgleichungen für diesen Punkt auf und löst diese nach den Parametern auf. Die Rechnung ist diesmal allerdings schwierig, weil die Transformationsgleichungen nichtlinear sind. Sie ergibt:

$$\alpha = T_P + \arccos\left(\frac{x_P^2 - y_P^2 + E_P^2}{2x_P E_P}\right)$$

$$\beta = T_P + \arcsin\left(\frac{x_P^2 - y_P^2 - E_P^2}{2y_P E_P}\right)$$

(T_P, E_P) sind die Polarkoordinaten von P im Zielsystem.

Beachten Sie, dass bei den Arkusfunktionen jeweils auch der Nebenwert in Betracht kommt. Insofern ist die Lösung nicht eindeutig.

Die Rücktransformation ist keine Scherung in dem beschriebenen Sinn.

Aufgabe 28: Durch eine Scherung soll der Punkt P(14,02;23,06) im Startsystem in den Punkt P(17,765;20,476) im Zielsystem überführt werden. Berechnen Sie die Parameter α,β. Überzeugen Sie sich, dass die Scherung mit den Parametern -α,-β keine Rücktransformation zur berechneten Scherung darstellt.

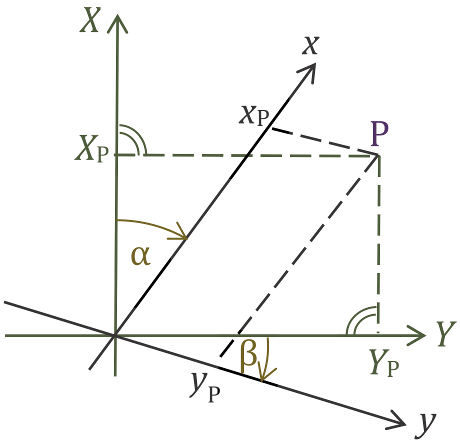


Abbildung 34: Transvektion (Scherung)

Elementare Transformationsschritte sind selten allein ausreichend, um Abbildungsvorgänge zu beschreiben. Häufiger werden sie zu komplexeren Transformationen zusammengesetzt.

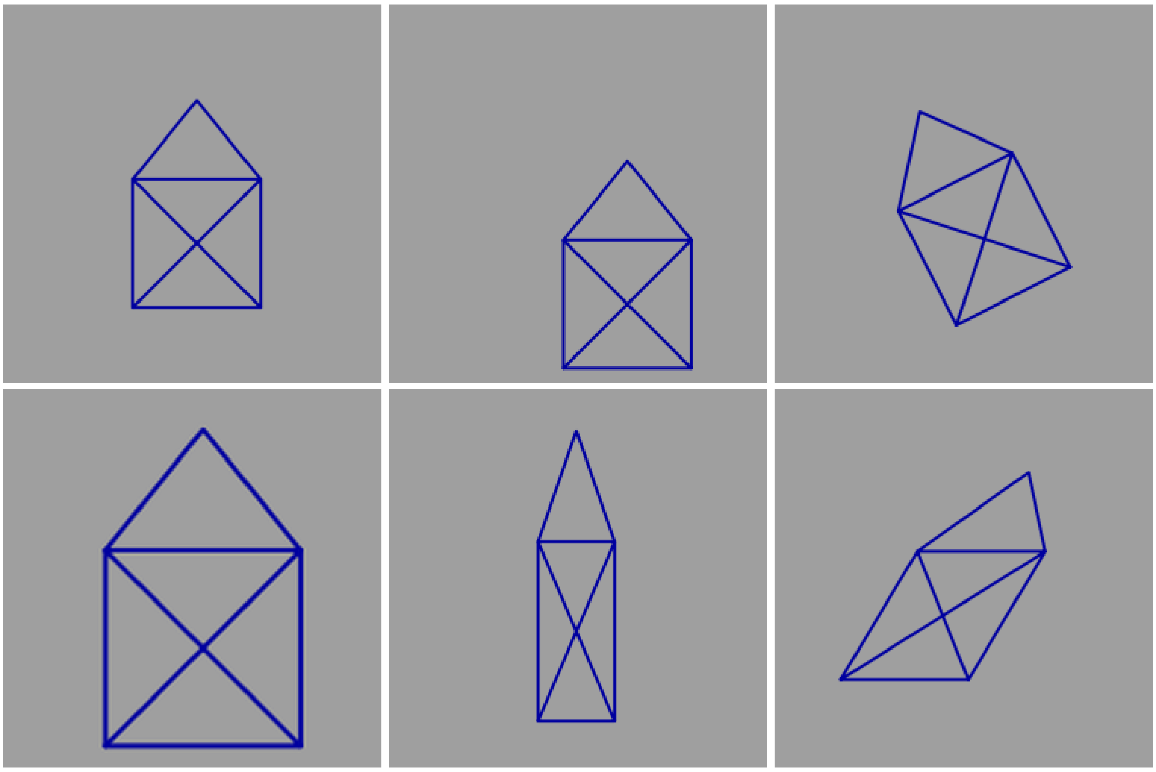


Abbildung 35: Original (links oben) und Bilder nach Translation (Mitte oben), Rotation(rechts oben), einer Skalierung (links unten) und zwei Skalierungen (Mitte unten) sowie Transvektion (rechts unten)

Tabelle 3: Eigenschaften der elementaren Transformationsschritte

Transformationsschritt	**Parameter**	**Was bleibt erhalten**	**Rücktransformation**
Translation	Y_0, X_0	Kongruenz	$-Y_0$, $-X_0$
Rotation	ε	Kongruenz	$-\varepsilon$
eine Skalierung	m	Ähnlichkeit	$1/m$
zwei Skalierungen	m_y, m_x	Parallelität	$1/m_y$, $1/m_x$
Transvektion	α,β	Parallelität, Flächeninhalt	keine reine Transvektion

6.2 ROTATION UND TRANSLATION

Die Hintereinanderausführung von Rotation und Translation wird durch zwei Translationsparameter und einen Rotationsparameter bestimmt. Die Transformationsgleichungen können mit den Parametern (ε,Y_0,X_0) lauten:

$$Y = Y_0 + x \cdot \sin\varepsilon + y \cdot \cos\varepsilon$$
$$X = X_0 + x \cdot \cos\varepsilon - y \cdot \sin\varepsilon$$

Nach diesen Gleichungen wird auf P(y,x) zuerst die Rotation und dann die Translation angewendet. Wenn man umgekehrt vorgeht, gelangt man mit den Parametern (y_0,x_0,ε) zu folgenden Transformationsgleichungen:

$$Y = (x_0 + x) \sin \varepsilon + (y_0 + y) \cos \varepsilon$$
$$X = (x_0 + x) \cos \varepsilon - (y_0 + y) \sin \varepsilon$$

Beide Transformationsgleichungssysteme beschreiben **dieselbe Transformation**, allerdings mit unterschiedlichen Translationsparametern. Man bezeichnet das als alternative **Parametrisierung** dieser Transformation. Die zugehörigen Parameter können leicht ineinander umgerechnet werden:

$$Y_0 = x_0 \cdot \sin \varepsilon + y_0 \cdot \cos \varepsilon$$
$$X_0 = x_0 \cdot \cos \varepsilon - y_0 \cdot \sin \varepsilon$$

$$y_0 = Y_0 \cdot \cos \varepsilon - X_0 \cdot \sin \varepsilon$$
$$x_0 = Y_0 \cdot \sin \varepsilon + X_0 \cdot \cos \varepsilon$$

(Y_0,X_0) sind die Koordinaten des Startsystemursprungs im Zielsystem. (y_0,x_0) sind die Koordinaten des Startsystempunktes, der in den Ursprung des Zielsystems transformiert wird. Der Drehwinkel ε ist derselbe in beiden Parametrisierungen.

Wenn Sie Translationsparameter einer solchen Transformation mitteilen oder mitgeteilt bekommen, muss klar hervorgehen, ob dies die Parametern Y_0 und X_0 oder y_0 und x_0 sind.

Beispiel 20: Die Punkte A,B,C aus Aufgabe 4 sollen durch Rotation und Translation in ein Koordinatensystem überführt werden, dessen Ursprung in A liegt und dessen positive Abszisse durch B verläuft.

Lösung: Günstig ist hier die Variante „Translation vor Rotation“. A soll in den Zielsystemursprung transformiert werden, das heißt

$$y_0 = -y_A = -432{,}29; \quad x_0 = -x_A = -337{,}45.$$

Der Richtungswinkel t_{AB} im Startsystem beträgt 139,805 gon (↗ Lösung zu Aufgabe 4). Damit ergibt sich der Rotationsparameter entsprechend Abschnitt 6.1 zu

$$\varepsilon = T_{AB} - t_{AB} = 400 \text{ gon} - 139{,}805 \text{ gon} = 260{,}195 \text{ gon}$$

Die Transformationsgleichungen lauten somit

$$Y = (x - 337{,}45) \sin 260{,}195 \text{ gon} + (y - 432{,}29) \cos 260{,}195 \text{ gon}$$
$$X = (x - 337{,}45) \cos 260{,}195 \text{ gon} - (y - 432{,}29) \sin 260{,}195 \text{ gon}$$

Wenn man lieber die Parameter (Y_0,X_0,ε) verwendet, so erhält man

$$Y_0 = -337{,}45 \cdot \sin 260{,}195 \text{ gon} + (-432{,}29) \cdot \cos 260{,}195 \text{ gon} = 526{,}630$$
$$X_0 = -337{,}45 \cdot \cos 260{,}195 \text{ gon} - (-432{,}29) \cdot \sin 260{,}195 \text{ gon} = -152{,}996$$

Die Punkte A,B,C haben im Zielsystem folgende Koordinaten:

Punkt	A	B	C
Y [m]	0,000	0,001	-157,892
X [m]	0.000	203,944	160,413

Nun kann das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet werden.

Probe: Da das Dreieck ABC kongruent bleibt, müssen seine Seiten AB,BC,CA nach der Transformation dieselbe Länge haben. AB = 203,94 erkennt man sofort, die anderen Seiten berechnet man aus Zielsystemkoordinaten zu BC = 163,78 m und CA = 225,08 m ✓ (↗Beispiel 4).

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel20

Aufgabe 29: Lösen Sie die Aufgabe 4 b) mit Hilfe von Transformationen.

6.3 ROTATION, SKALIERUNG UND TRANSLATION

Die Hintereinanderausführung von Rotation, Skalierung und Translation ist die allgemeinste Transformation, die Ähnlichkeit von Original und Bildfiguren wahrt. Man nennt sie deshalb auch **Ähnlichkeitstransformation**. Sie wird durch zwei Translations-, einen Skalen- und einen Rotationsparameter bestimmt. Die Transformationsgleichungen können mit den Parametern (ε, m, Y_0, X_0) lauten:

$$Y = Y_0 + m \cdot (x \cdot \sin \varepsilon + y \cdot \cos \varepsilon)$$
$$X = X_0 + m \cdot (x \cdot \cos \varepsilon - y \cdot \sin \varepsilon)$$

Nach diesen Gleichungen wird auf P(y,x) zuerst die Rotation, dann die Skalierung und schließlich die Translation angewendet. Eine alternative Parametrisierung ist (o, a, Y_0, X_0) mit der Umrechnung

$$o = m \cdot \sin \varepsilon, \qquad a = m \cdot \cos \varepsilon$$

so dass die Transformationsgleichungen die Form

$$Y = Y_0 + x \cdot o + y \cdot a$$
$$X = X_0 + x \cdot a - y \cdot o$$

annehmen. Der große Vorteil ist, dass die Bestimmung der Parameter aus Koordinaten von identischen Punkten auf ein **lineares** Gleichungssystem führt. Die Berechnung von m und ε kann man danach mittels

$$m = \sqrt{o^2 + a^2}, \quad \varepsilon = \arctan(o/a)$$

vornehmen, falls erforderlich.

Die Anzahl der bedeutsamen Ziffern bei der Angabe und Verwendung von o,a,m,ε muss etwa der der Koordinaten entsprechen. Dabei ist unmaßgeblich, wo bei den einzelnen Werten das Komma steht. Ggf. kann eine Ziffer mehr verwendet werden. Ist m≈1, dann haben m,a,o keine bedeutsamen Ziffern vor dem Komma (höchstens m die „1") und müssen umso mehr Ziffern nach dem Komma haben.

Auch hier kann die Reihenfolge der elementaren Transformationsschritte geändert werden. Z.B. kann die Translation am Anfang statt am Ende stehen. Man gelangt mit den Parametern (y_0,x_0,o,a) zu folgenden Transformationsgleichungen:

$$Y = (x_0 + x)\, o + (y_0 + y)\, a$$
$$X = (x_0 + x)\, a - (y_0 + y)\, o$$

Auch hier ändern sich durch Vertauschung der Schritte die Zahlenwerte einiger Parameter. Es bleibt aber dieselbe Transformation.

Zu jeder Transformation *(y,x) →(Y,X)* gehört eine **Rücktransformation** *(Y,X) →(y,x)*. Die Parameter der Rücktransformation gewinnt man aus denen der Hintransformation durch Auflösen der Transformationsgleichungen nach *(y,x)* und neuem Zusammenfassen. Bei der Ähnlichkeitstransformation mit den Rücktransformationsgleichungen

$$y = y_0 + X \cdot O + Y \cdot A$$
$$x = x_0 + X \cdot A - Y \cdot O$$

findet man zwischen (o,a,Y_0,X_0) und (O,A, y_0, x_0) die Beziehung

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{o}^2}, \qquad \mathrm{O} = -\frac{\mathrm{o}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{o}^2}, \qquad \mathrm{y}_0 = -\mathrm{X}_0 \cdot \mathrm{O} - \mathrm{Y}_0 \cdot \mathrm{A}, \qquad \mathrm{x}_0 = \mathrm{X}_0 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{Y}_0 \cdot \mathrm{O}$$

Aufgabe 30: Rechnen Sie die Transformationsparameter (ε = 16,10 gon, m = 1,001711, Y_0 = 14,02, X_0 = 23,06) in die Parameter (o,a,Y_0,X_0) und (y_0,x_0,o,a) um. Überzeugen Sie sich, dass alle drei Transformationsgleichungen identische Ergebnisse liefern, indem Sie einen selbst gewählten Punkt transformieren. Finden Sie die Parameter der Rücktransformation. Machen Sie nun dasselbe mit der Rücktransformation.

6.4 ÄHNLICHKEITSTRANSFORMATION MIT ZWEI IDENTISCHEN PUNKTEN

Die folgende Aufgabe gehört zu den Standardaufgaben der Geodäsie:

Gegeben sind zwei identische Punkte A,E mit Koordinaten in zwei Systemen (y,x) und (Y,X) sowie eine Reihe von Neupunkten N_1,N_2,N_3,... die nur Koordinaten im (y,x)-System besitzen. Diese sollen in das (Y,X)-System transformiert werden. Die passende Transformation könnte hier die Ähnlichkeitstransformation sein.

Hinweis: Wenn die Systeme (y,x) und (Y,X) gleichen Maßstab aufweisen, wäre eher eine Transformation nach Abschnitt 6.2 zu berechnen. Dies ist aber schwieriger. Der Maßstab der Ähnlichkeitstransformation müsste theoretisch m=1,000000 betragen. Der tatsächlich berechnete Maßstab sollte nur geringfügig davon abweichen und dient als Kontrolle der gegebenen Koordinaten (keine reine Rechenprobe).

Berechnung über Richtungswinkel und Strecken:

1. Aus Koordinaten von A und E werden in beiden Systemen die Richtungswinkel t_{AE} und T_{AE} sowie die Strecken e_{AE} und E_{AE} bestimmt.
2. Daraus ergeben sich Rotations- und Skalenparameter: $\varepsilon = T_{AE} - t_{AE}$, $m = E_{AE} / e_{AE}$.
3. Haben beide Systeme etwa gleichen Maßstab, wird $m \approx 1$ überprüft.
4. Bei Bedarf werden $o = m \cdot \sin \varepsilon$ und $a = m \cdot \cos \varepsilon$ berechnet.
5. Die Translationsparameter ergeben sich durch Umstellen der Transformationsgleichungen mit o,a oder mit m,ε für einen identischen Punkt, z.B.

$$Y_0 = Y_A - m \cdot (x_A \cdot \sin \varepsilon + y_A \cdot \cos \varepsilon)$$
$$X_0 = X_A - m \cdot (x_A \cdot \cos \varepsilon - y_A \cdot \sin \varepsilon)$$

6. Nun werden sämtliche Punkte $A,E,N_1,N_2,N_3,\ldots$ ins Zielsystem transformiert.

Berechnung über ein lineares Gleichungssystem:

1. Mit den Parametern (o,a,Y_0,X_0) oder (y_0,x_0,o,a) werden die Transformationsgleichungen für die identischen Punkte aufgeschrieben, z.B.:

$$Y_A = Y_0 + x_A \cdot o + y_A \cdot a \qquad X_A = X_0 + x_A \cdot a - y_A \cdot o$$
$$Y_E = Y_0 + x_E \cdot o + y_E \cdot a \qquad X_E = X_0 + x_E \cdot a - y_E \cdot o$$

2. Dieses Gleichungssystem wird nach den vier Parametern (o,a,Y_0,X_0) aufgelöst.
3. Bei Bedarf werden m und ε berechnet. Haben beide Systeme etwa gleichen Maßstab, wird $m \approx 1$ überprüft.
4. Nun werden sämtliche Punkte $A,E,N_1,N_2,N_3,\ldots$ ins Zielsystem transformiert.

Probe für beide Lösungen: Y_A,X_A,Y_E,X_E müssen die gegebenen Werte annehmen. Außerdem kann man noch beliebige Spannmaße e,E im Start- und Zielsystem berechnen. Daraus muss sich jeweils der Maßstab ergeben: $E = m \cdot e$. Man nimmt hierfür am besten Punkte, deren Verbindungsgerade nicht nahezu parallel zu den Koordinatenachsen verläuft.

Beispiel 21: Von 2 Tachymeterstandpunkten P,Q wurden folgende Messungen erhalten:

Punkt P	Hz-Ri. [gon]	Hz-Str. [m]	Punkt Q	Hz-Ri. [gon]	Hz-Str. [m]
A	0,000	40,458	A	0,000	45,293
B	120,992	24,291	B	73,402	52,297
C	246,480	43,697	D	321,884	16,103

Nur bei den Messungen auf Punkt Q wurde die EDM-Maßstabskorrektion korrekt eingestellt. Berechnen Sie die Horizontalstrecke CD.

Lösung über Richtungswinkel und Strecken

Auf beiden Standpunkten wird je ein Standpunktsystem definiert, z.B. auf P das *yx*-System und auf Q das *YX*-System: Die *x*- und die *X*-Achse weisen am besten nach Teilkreisnull, die *y*- und die *Y*-Achse rechtwinklig dazu. So erhält man durch Polares Anhängen folgende Koordinaten:

Punkt	y [m]	x [m]	Y [m]	X [m]
P	0,000	0,000		
Q			0,000	0,000
A	0,000	40,458	0,000	45,293
B	22,982	-7,865	47,799	21,220
C	-29,144	-32,559		
D			-15,161	5,427

Damit liegen zwei Systeme mit zwei identischen Punkten A und B vor, die sich in Nullpunkt und Achsrichtung unterscheiden. Wegen der Maßstabsabweichung sind die Systeme nur geometrisch ähnlich. Die passende Transformation sollte hier die Ähnlichkeitstransformation sein.

1. Aus Koordinaten von A und B werden in beiden Systemen die Richtungswinkel t_{AB} = 171,738 gon und T_{AB} = 129,701 gon sowie die Strecken e_{AB} = 53,510 m und E_{AB} = 53,519 m bestimmt.
2. Daraus ergeben sich Rotations- und Skalenparameter: ε = 129,701 gon – 171,738 gon = 357,963 gon, m = 53,519 m / 53,510 m = 1,000168.
3. Beide Systeme haben etwa gleichen Maßstab, d.h. $m \approx 1$ ✓.
4. a und o werden nicht unbedingt benötigt.
5. Die Translationsparameter ergeben sich z.B. aus (Einheiten sind Meter und Gon)

$$Y_0 = 0{,}000 - 1{,}000168 \cdot (40{,}458 \cdot \sin 357{,}963 + 0{,}000 \cdot \cos 357{,}963) = 24{,}820$$
$$X_0 = 45{,}293 - 1{,}000168 \cdot (40{,}458 \cdot \cos 357{,}963 - 0{,}000 \cdot \sin 357{,}963) = 13{,}334$$

6. Nun werden die Punkte A,B,C ins Zielsystem *YX* transformiert. Wir schreiben nur die Gleichungen für C auf:

$Y_C = 24{,}820 + 1{,}000168 \cdot (-32{,}559 \cdot \sin \varepsilon - 29{,}144 \cdot \cos \varepsilon) = 21{,}772$
$X_C = 13{,}334 + 1{,}000168 \cdot (-32{,}559 \cdot \cos \varepsilon + 29{,}144 \cdot \sin \varepsilon) = -30{,}264$

Lösung über ein lineares Gleichungssystem

1. Folgendes System ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 40{,}458 & 0{,}000 \\ 0 & 1 & 0{,}000 & 40{,}458 \\ 1 & 0 & -7{,}865 & 22{,}982 \\ 0 & 1 & -22{,}982 & -7{,}865 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ X_0 \\ o \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}000 \\ 45{,}293 \\ 47{,}799 \\ 21{,}220 \end{pmatrix}$$

2. Die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ X_0 \\ o \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24{,}820 \\ 13{,}334 \\ -0{,}613472 \\ 0{,}789931 \end{pmatrix}$$

3. m und ε werden nicht unbedingt benötigt.
4. Nun werden die Punkte A,B,C ins Zielsystem YX transformiert. Wir schreiben nur die Gleichungen für C auf:

$Y_C = 24{,}820 + 32{,}559 \cdot 0{,}613472 - 29{,}144 \cdot 0{,}789931 = 21{,}772$
$X_C = 13{,}334 - 32{,}559 \cdot 0{,}789931 - 29{,}144 \cdot 0{,}613472 = -30{,}264$

⚠ *Beachten Sie, dass m,a,o,ε ausreichend Ziffern bekommen. Für die Koordinaten sind 5 Ziffern gegeben, also sollten soviele auch für m,a,o,ε verwendet werden, zur Sicherheit eine mehr. Diese Ziffern von a,o stehen hier alle nach dem Komma.*

Probe: Die berechneten Koordinaten Y_A, X_A, Y_B, X_B müssen mit den gegebenen Koordinaten übereinstimmen. Alles stellt sich als erfüllt heraus. Zusätzlich erhalten wir das Spannmaß AC im System yx zu e_{AC} = 78,618 m und im System YX zu E_{AC} = 78,631 m. Außerdem ergibt sich $m \cdot e_{AC}$ = 78,631 m ✓.

Das Endergebnis ist E_{CD} = 51,360 m. Man berechnet diese Strecke aus Zielsystem-koordinaten YX, denn nur diesem System liegt der korrekte Maßstab zugrunde.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel21-aufgabe31

Aufgabe 31: Lösen Sie die Aufgabe aus Beispiel 21, indem Sie Punkt D vom System YX ins System yx transformieren. Berechnen Sie die Horizontalstrecke CD zunächst im System yx und dann mit Hilfe des Maßstabs im System YX, denn nur diesem System liegt der korrekte Maßstab zugrunde.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel21-aufgabe31

6.5 ANWENDUNG: HANSENSCHE AUFGABE

Diese klassische Methode der **Punktpaarbestimmung** geht von zwei unbekannten Theodolitstandpunkten P,Q aus, auf denen die Gegensichtrichtungen r_{PQ} und r_{QP} sowie die Richtungen zu zwei Festpunkten A,B gemessen werden. Zu bestimmen ist das Punktpaar P,Q (↗Abbildung 36).

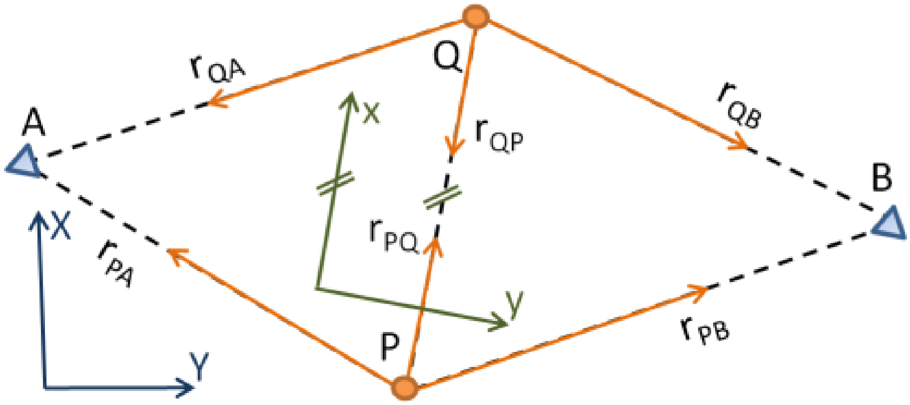


Abbildung 36: Punktpaarbestimmung

Es stellt sich heraus, dass diese Aufgabe nicht mit elementarer Goniometrie lösbar ist. Möglich ist aber folgende

Berechnung über Vorwärtsschnitte und Transformation

1. Ein lokales Hilfskoordinatensystem mit einer Achse durch P und Q oder parallel zu PQ mit beliebiger Längeneinheit wird festgelegt.
2. Die Punkte A und B werden in diesem System durch Vorwärtsschnitte bestimmt.
3. Über die identischen Punkte A,B werden die Transformationsparameter vom lokalen Hilfssystem in das gegebene System bestimmt.
4. Die Punkte P,Q werden mit diesen Parametern in das gegebene System transformiert.
5. Entsprechend der allgemeinen Probenstrategie (↗ Vorwort) berechnet man die gemessenen Richtungen aus den Zielsystemkoordinaten zurück.

Beispiel 22: Gegeben sind die folgenden kartesischen Lagekoordinaten und Messwerte:

Punkt	Y [m]	X [m]
A	472,29	287,45
B	537,65	248,08

Punkt P	Hz-Ri. [gon]
A	0,000
Q	43,231
B	89,424

Punkt Q	Hz-Ri. [gon]
A	0,000
B	297,850
P	371,323

Wir bestimmen die kartesischen Lagekoordinaten von P und Q in diesem System.

Lösung: Zunächst legen wir folgendes lokale *yx*-System fest: Die *x*-Achse verläuft parallel zu PQ, so dass

Punkt	y [LE]	x [LE]
P	100,00	100,00
Q	100,00	200,00

Die Koordinaten haben nicht wie bisher üblich die Einheit Meter, sondern sind in einer willkürlich festgelegten Längeneinheit LE gegeben. In diesem System berechnen wir aus Richtungen und Orientierung über die Gegensicht t_{PQ}=0,000gon bzw. t_{QP}=200,000gon folgende Richtungswinkel:

t_{PA}=356,769gon t_{QA}=228,677gon t_{PB}= 46,193gon t_{QB}=126,527gon

Die beiden Vorwärtsschnitte über diese Richtungswinkel liefern

y_A=69,759LE x_A=137,468LE y_B=163,695LE x_B=171,808LE

A und B haben jetzt Koordinaten in beiden Systemen. Daraus ergeben sich wie gewohnt die Transformationsparameter

$$\varepsilon = T_{AB} - t_{AB} = 134{,}514\text{gon} - 77{,}688\text{gon} = 56{,}826\text{gon}$$

$$m = E_{AB} / e_{AB} = 76{,}302\text{m} / 100{,}016\text{LE} = 0{,}762898\text{m/LE}$$

Der Maßstab ist offenbar deutlich verschieden von Eins wegen der willkürlich festgelegten Längeneinheit LE. Nun berechnet man die beiden fehlenden Parameter

$$Y_0 = 472{,}29 - 0{,}762898 \cdot (137{,}468 \cdot \sin(56{,}826) - 69{,}759 \cdot \cos(56{,}826)) = 357{,}234$$
$$X_0 = 287{,}45 - 0{,}762898 \cdot (137{,}468 \cdot \cos(56{,}826) - 69{,}759 \cdot \sin(56{,}826)) = 263{,}098$$

In diesen Gleichungen fehlen die Einheiten. Man überzeugt sich leicht, dass die Ergebnisse in Meter erhalten werden. Schließlich werden alle Punkte mit diesen vier Parametern ε, m, Y_0, X_0 ins Zielsystem transformiert. Dabei erhält man

Punkt	Y [m]	X [m]
A	472,290 ✓	287,450 ✓
B	537,650 ✓	248,080 ✓
P	<u>464,504</u>	<u>251,551</u>
Q	<u>523,913</u>	<u>299,413</u>

Die Transformationsprobe ist erfüllt, weil A und B auf ihre gegebenen Koordinaten transformiert werden. Das reicht allerdings keineswegs als endgültige Probe schon aus.

Probe: Wir erhalten zunächst die zugehörigen Richtungswinkel T und führen damit praktisch einen Stationsabriss durch:

Punkt <u>P</u>	T [gon]	T-r [gon]
A	13,597	13,597
Q	56,826	13,595✓
B	103,019	13,595✓

Punkt <u>Q</u>	T [gon]	T-r [gon]
A	285,503	285,503
B	183,354	285,504✓
P	256,826	285,503✓

Es ergeben sich bis auf Rundungseffekte dieselben Orientierungswinkel.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=tutorial/hansen&DecimalSeparator=Comma

6.6 ANWENDUNG: KLEINPUNKTBERECHNUNG

Die klassische Methode der Kleinpunktberechnung [G&J 4.1.3] geht von einer Messungslinie AE aus, auf die Neupunkte P_i aufgewinkelt werden (↗ Abbildung 37). Abszissen x_i und Ordinaten y_i werden gemessen. Die Punkte A und E haben gegebene Koordinaten in einem System, in dem auch die Neupunkte koordiniert werden sollen. Diese Berechnung lag dem klassischen Messverfahren „Orthogonalaufnahme“ zugrunde und tritt heute in anderer Form immer noch in Erscheinung.

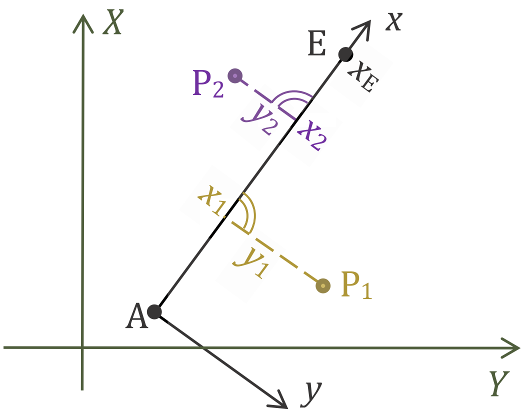


Abbildung 37: Kleinpunktberechnung

Die Berechnung erfolgt mittels Transformation vom Startsystem yx ins Zielsystem YX mit den identischen Punkten A,E. Sollte x_E nicht gemessen worden sein, so setzt man

$$x_E = \sqrt{(Y_E - Y_A)^2 + (X_E - X_A)^2}$$

In diesem Fall ist der Maßstab beider Systeme gleich und es muss sich der Transformationsparameter m=1,000000 ergeben. Andernfalls ergibt sich nur m≈1. Beides kann als Probe dienen. Daneben sind die weiteren Proben aus Abschnitt 6.4 wichtig. Weitere Besonderheiten gibt es nicht.

6.7 ANWENDUNG: RECHTECK DURCH FÜNF PUNKTE

Wir erarbeiten eine alternative Lösung zum Problem aus Abschnitt 5.7 über Transformationen (↗ Abbildung 38).

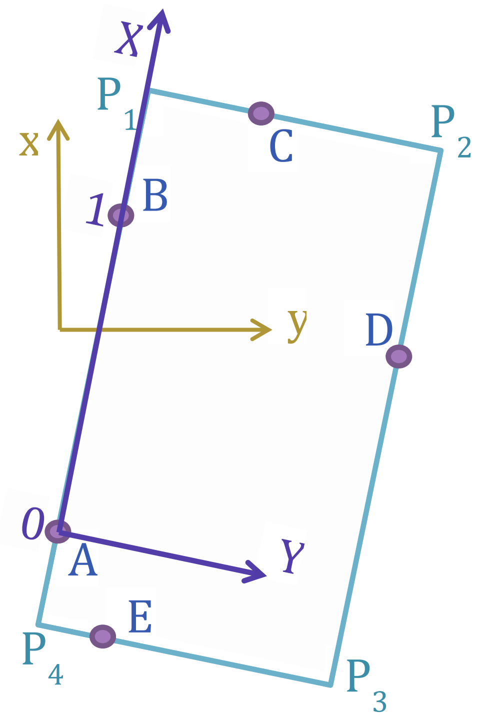


Abbildung 38: Rechteck durch fünf Punkte

1. Zusätzlich zum System (yx), in dem die Punkte A,B,C,D,E gegeben sind, führen wir ein lokales Hilfskoordinatensystem (YX) mit Ursprung in A und X-Achse durch B ein. Am einfachsten weist man B die X-Koordinate 1 zu, so dass das Hilfssystem eine willkürlich festgelegte Längeneinheit besitzt. Anders als im Abschnitt 6.5 kann hier aber auch der Abstand AB aus gegebene Koordinaten berechnet und als X-Koordinate von B gesetzt werden. Einen Vorteil hat das nicht.
2. Mit den identischen Punkten A,B berechnen wir Transformationsparameter einer Ähnlichkeitstransformation (yx) → (YX).
3. Mit diesen Parametern transformieren wir C,D,E ins Hilfssystem (YX).
4. Daraus leiten wir die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks im Hilfssystem ab: P_1 hat dieselbe X-Koordinate wie C und dieselbe Y-Koordinate wie A und B, also Null. P_2 hat dieselbe X-Koordinate wie C und dieselbe Y-Koordinate wie D, usw.
5. Wir bestimmen die Parameter der Rücktransformation (YX) → (yx).
6. Mit diesen Parametern transformieren wir die Punkte P_1 … P_4 ins Ausgangssystem (yx).

7. **Probe**: Zunächst können auch die Punkte A,B,C,D,E ins Ausgangssystem *yx* transformiert und mit den gegebenen Koordinaten verglichen werden. Weiterhin überzeuge man sich anhand der Endkoordinaten, dass P_1 … P_4 ein Rechteck bilden.

Aufgabe 32: Lösen Sie die Aufgabe 26 über Transformationen.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=tutorial/rectfive&DecimalSeparator=Comma

6.8 EBENE HELMERT-TRANSFORMATION

Häufig liegen bei einer Transformationsaufgabe mehr identische Punkte vor, als zur eindeutigen Bestimmung der Transformationsparameter unbedingt gebraucht werden. Man findet dann im Allgemeinen keine Parameter, so dass alle Transformationsgleichungen für alle identischen Punkte genau erfüllt sind. Es bleiben dann kleine Widersprüche zwischen gegebenen und den aus Transformationsgleichungen berechneten Koordinaten, die sogenannten **Restklaffungen** oder „Restklaffen" oder „Residuen" *W*:

$$W_{Y_i} = Y_i^{gegeben} - Y_i^{berechnet}$$

$$W_{X_i} = X_i^{gegeben} - X_i^{berechnet}$$

Man kann wenigsten verlangen, dass die Restklaffungen klein sind. Das geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate durch die Zusatzbedingung

$$\sum \left(W_{Y_i}^2 + W_{X_i}^2 \right) = \text{Minimum}$$

Dann ist die Lösung durch geodätische Ausgleichung zu berechnen. In einigen Sonderfällen kann man die Lösung durch elementare Formeln darstellen, so dass die Berechnung ohne Kenntnis der Ausgleichungsrechnung möglich ist.

Die ebene Helmert-Transformation ist eine Ähnlichkeitstransformation, bei der die Parameter aus mehr als zwei identischen Punkten berechnet werden. Das folgende einfache Rechenschema ist anwendbar, wenn

1. alle Startsystemkoordinaten aller identischen Punkte als exakte (fehlerfreie) Größen betrachtet werden können und
2. alle Zielsystemkoordinaten aller identischen Punkte gleich genau sind,
3. sowie alle unabhängig voneinander bestimmt wurden.

Hinweis: Praktisch ist oft keine einzige dieser drei Bedingungen vollkommen erfüllt. Das Schema wird trotzdem häufig angewendet, um eine aufwändige Ausgleichung zu vermeiden. Es liefert dann immerhin noch eine für manche Zwecke brauchbare Näherungslösung.

Rechenschema

1. In beiden Systemen wird der Schwerpunkt S der identischen Punkte berechnet:

$$y_S = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}, \quad x_S = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, \quad Y_S = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}, \quad X_S = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n},$$

2. Durch Translation wird in beiden Systemen der Schwerpunkt in den Ursprung verschoben. Dabei ergeben sich zwei neue schwerpunktzentrierte Koordinatensysteme:
$$\bar{y}_i = y_i - y_S, \qquad \bar{x}_i = x_i - x_S, \qquad \bar{Y}_i = Y_i - Y_S, \qquad \bar{X}_i = X_i - X_S$$
3. **Probe**: Die Summen der schwerpunktzentrierten Koordinaten müssen Null sein: $\sum \bar{y}_i = \sum \bar{x}_i = \sum \bar{Y}_i = \sum \bar{X}_i = 0$.
4. Mit den schwerpunktzentrierten Koordinaten erhält man die Transformationsparameter mit folgenden Formeln:

$$o = \frac{\sum(\bar{x}_i \cdot \bar{Y}_i - \bar{y}_i \cdot \bar{X}_i)}{\sum(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)}, \qquad a = \frac{\sum(\bar{x}_i \cdot \bar{X}_i + \bar{y}_i \cdot \bar{Y}_i)}{\sum(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)},$$

$$Y_0 = Y_S - o \cdot x_S - a \cdot y_S, \qquad X_0 = X_S - a \cdot x_S + o \cdot y_S$$

5. Aus a und o berechnet man Maßstab und Drehwinkel wie in Abschnitt 6.4, wenn diese Größen gebraucht werden. Ggf. kann $m \approx 1$ wie bisher als Probe dienen.
6. Alle Punkte werden mit diesen vier Parametern (a, o, Y_0, X_0) transformiert, also die identischen und die nicht identischen Punkte:

$$Y_j = Y_0 + x_j \cdot o + y_j \cdot a$$
$$X_j = X_0 + x_j \cdot a - y_j \cdot o$$

7. Schließlich werden für die identischen Punkte die Restklaffungen berechnet. Diese sollten kleine Größen sein, wenn keine Fehler aufgetreten sind.
8. **Proben**: Die Summen der Restklaffungen müssen Null sein: $\sum W_{Y_i} = \sum W_{X_i} = 0$. Außerdem kann man die üblichen Spannmaßproben wie in Abschnitt 6.4 durchführen. Werden Spannmaße mit identischen Punkten berechnet, so sollten die berechneten und nicht die gegebenen Koordinaten verwendet werden, sonst weisen die Spannmaße Abweichungen etwa in der Größe der Restklaffungen auf.
9. Abschließend ist noch die Berechnung von Genauigkeitsmaßen möglich [G&J 8.1.3]. Das soll an dieser Stelle aber weggelassen werden.

⚠ *Spannmaßproben kontrollieren nicht die Berechnung der Transformationsparameter, sind also allein nicht ausreichend.*

Das Rechenschema der Helmert-Transformation kann theoretisch auch bei zwei identischen Punkten angewendet werden, ist dann aber zu aufwändig. Oft wird auch dieser Fall als Helmert-Transformation bezeichnet.

Beispiel 23: In Beispiel 21 wurde zusätzlich gemessen:

Punkt P	Hz-Ri. [gon]	Hz-Str. [m]
Q	310,635	28,107

Berechnen Sie damit nochmals die Horizontalstrecke CD.

Lösung: In den beiden Standpunktsystemen sind jetzt n=3 Punkte identisch, nämlich A, B und zusätzlich Q. Das sind mehr als zur eindeutigen Lösung erforderlich (n=2). Unter den genannten Bedingungen kann das Rechenschema der Helmert-Transformation angewendet werden. Zunächst rechnen wir die polaren Koordinaten von Q im Standpunktsystem P in kartesische um: y_Q= -27,716m, x_Q=4,674m.

1. Die Schwerpunktkoordinaten sind y_S =-1,578, x_S =12,422, Y_S=15,933, X_S=22,171. Beachten Sie, dass die Punkte C und D hier nicht einbezogen werden.
2. Der Übergang zu den schwerpunktzentrierten Systemen ergibt.

Punkt	$\bar{y}_i$	$\bar{x}_i$	$\bar{Y}_i$	$\bar{X}_i$
Q	-26,138	-7,748	-15,933	-22,171
A	1,578	28,036	-15,933	23,122
B	24,560	-20,287	31,866	-0,951
Summe	0,000✓	0,000✓	0,000✓	0,000✓

3. Die Summenprobe ist erfüllt.
4. Die Transformationsparameter ergeben

$$o = \frac{-969{,}71 - 592{,}64}{1288{,}88 + 1257{,}61} = -0{,}613531$$

$$a = \frac{1173{,}94 + 839{,}32}{1288{,}88 + 1257{,}61} = 0{,}790602$$

$$Y_0 = 15{,}933 + 0{,}613531 \cdot 12{,}422 + 0{,}790602 \cdot 1{,}578 = 24{,}802$$

$$X_0 = 22{,}171 - 0{,}790602 \cdot 12{,}422 + 0{,}613531 \cdot 1{,}578 = 13{,}318$$

5. Für Maßstab und Drehwinkel erhält man m=1,000736, ε=357,986 gon. m≈1 ist plausibel.
6. Alle Punkte Q,A,B,C werden ins Zielsystem transformiert.

7. Bei den identischen Punkten A,B,Q werden die Restklaffungen berechnet. Diese betragen höchstens 22mm und sind deshalb plausibel.

Punkt	Y [m]	X [m]	W_Y[m]	W_X[m]
Q	0,022	0,009	-0,022	-0,009
A	-0,020	45,304	0,020	-0,011
B	47,797	21,200	0,002	0,020
C	21,737	-30,304		
Summe			0,000✓	0,000✓

8. **Proben**: Die Summen der Restklaffungen sind in Ordnung. Eine Spannmaßprobe kann wie in Beispiel 21 erfolgen: e_{AC} = 78,618 m bleibt unverändert, und im System *YX* mit A(-0,020; 45,304) erhält man E_{AC} = 78,676 m. Außerdem ergibt sich $m \cdot e_{AC}$ = 78,676 m ✓.

Das Endergebnis ist E_{CD} = <u>51,363 m</u> . Man berechnet diese Strecke aus Koordinaten im System *YX*, denn nur diesem System liegt der korrekte Maßstab zugrunde.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel23_24

6.9 BESTIMMUNG DER PARAMETER BEI ROTATION UND TRANSLATION

Ohne Skalierung ist die Berechnung der Transformationsparameter aus identischen Punkten schwieriger, denn bei drei Parametern führen auch zwei identische Punkte schon auf ein Ausgleichungsproblem. Deshalb wird in der Praxis bei weniger hohen Ansprüchen der Maßstab oft berechnet, obwohl er bekannt ist. Damit ist allerdings ein Verlust an Genauigkeit und Zuverlässigkeit verbunden.

Es gibt aber eine Möglichkeit, auch dieses Ausgleichungsproblem durch ein einfaches **Rechenschema** zu lösen. Die Voraussetzungen sind dieselben wie für das Rechenschema der Helmert-Transformation.

1. Man berechnet zunächst eine Ähnlichkeits- oder Helmert-Transformation wie im Abschnitt 6.4 (bei n=2) oder 6.8 (bei n>2). Es ergeben sich die Parameter (ε, m, Y_0, X_0).
2. Ist der erhaltene Maßstab $m \approx 1$, wird dieser zwangsweise gleich Eins gesetzt. Andernfalls ist diese Transformation nicht zulässig.
3. Es verbleiben die Parameter (ε, Y_0, X_0). Mit diesen transformiert man alle Punkte ins Zielsystem wie in Abschnitt 6.2. Die Reihenfolge bleibt Rotation vor Translation, nur die Skalierung wird weggelassen (m:=1):

$$Y_i = Y_0 + x_i \cdot \sin \varepsilon + y_i \cdot \cos \varepsilon$$
$$X_i = X_0 + x_i \cdot \cos \varepsilon - y_i \cdot \sin \varepsilon$$

4. Man berechnet für die identischen Punkte die Restklaffungen wie bisher. Auch bei n=2 ergeben sich solche Restklaffungen:

$$W_{Y_i} = Y_i^{\text{gegeben}} - Y_i^{\text{berechnet}}, W_{X_i} = X_i^{\text{gegeben}} - X_i^{\text{berechnet}}$$

5. **Probe**: Die Restklaffungen sind wieder kleine Größen, aber die Summen sind diesmal nicht Null. Es können zwar Spannmaßproben berechnet werden, diese kontrollieren aber nicht die Richtigkeit der berechneten Transformationsparameter. Ersatzweise könnte man zusätzlich die Restklaffungen mit Maßstab (nach Helmert) berechnen und dort die Summenprobe durchführen.

⚠ *Das Prinzip der Berechnung einer Transformation mit Maßstab und Fortlassung der Skalierung durch Eins-Setzen des Maßstabes ist nicht auf andere Transformationen übertragbar.*

Beispiel 24: Das Beispiel 23 soll neu berechnet werden, nachdem sich zeigte, dass auch auf dem Standpunkt P der EDM-Maßstab korrekt eingestellt war. Dadurch entfällt die Notwendigkeit einer Skalierung, und diese soll auch unterbleiben.

Lösung:

1. Zunächst ist die Berechnung der Parameter der Helmert-Transformation vorzunehmen. Dies geschah bereits in Beispiel 23. Das Ergebnis war

   m=1,000736, ε=357,986 gon, Y_0=24,802 m, X_0=13,318 m.

2. Der Maßstab ist nahezu gleich Eins und wird zwangsweise gleich Eins gesetzt.
3. Q,A,B,C werden ins Zielsystem transformiert. Für Punkt C lauten die Transformationsgleichungen z.B.

   Y_C = 24,802 m – 32,559 m · sin 357,986 gon – 29,144 m · cos 357,986 gon
   X_C = 13,318 m – 32,559 m · cos 357,986 gon + 29,144 m · sin 357,986 gon

4. Bei den identischen Punkten Q,A,B werden die Restklaffungen berechnet. Diese betragen höchstens 40mm und sind deshalb plausibel.

Punkt	Y [m]	X [m]	W_Y	W_X
Q	0,040	0,018	-0,040	-0,018
A	-0,002	45,281	0,002	0,012
B	47,780	21,194	0,019	0,026
C	21,739	-30,272		

5. **Probe**: Die Probe für die Transformationsparameter wurde schon in Beispiel 23 berechnet. Es bleibt noch die Probe für die Transformation. Hierfür kann man Spannmaße berechnen. In Beispiel 23 war e_{AC} = 78,618 m berechnet worden. Aus

YX-Koordinaten ergibt sich jetzt E_{AC} = 78,619 m ✓. Ein Maßstab ist diesmal nicht zu berücksichtigen.

Das Endergebnis ist E_{CD} = 51,342 m, berechnet aus Zielsystemkoordinaten.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel23_24

6.10 EBENE AFFINTRANSFORMATION

Besteht zwischen Start- und Zielsystem keine geometrische Ähnlichkeit, kann die Beziehung zwischen beiden möglicherweise durch eine Affintransformation beschrieben werden.

[G&J 8.1.4] http://de.wikipedia.org/wiki/Affine_Transformation

Die ebene Affintransformation ist die allgemeinste Transformation in der Ebene, die die Kollinearität von Punkten und die Parallelität von Geraden wahrt. Die Transformationsgleichungen kann man wie folgt schreiben:

$$Y = Y_0 + a_4 \cdot x + a_3 \cdot y$$
$$X = X_0 + a_1 \cdot x - a_2 \cdot y$$

Die sechs Parameter sind also $(a_1, a_2, a_3, a_4, Y_0, X_0)$. Auch andere Parametrisierungen sind möglich, z.B. $(m_x, m_y, \alpha, \beta, Y_0, X_0)$ durch den Übergang zu zwei Maßstäben

$$m_x = \sqrt{a_1^2 + a_4^2}, \qquad m_y = \sqrt{a_2^2 + a_3^2}$$

und zwei Scherwinkeln

$$\alpha = \arctan\frac{a_4}{a_1}, \qquad \beta = \arctan\frac{a_2}{a_3}$$

Die Transformationsgleichungen lauten in dieser Parametrisierung

$$Y = Y_0 + (\sin\alpha) \cdot m_x \cdot x + (\cos\beta) \cdot m_y \cdot y$$
$$X = X_0 + (\cos\alpha) \cdot m_x \cdot x - (\sin\beta) \cdot m_y \cdot y$$

Man erkennt daran, dass man sich die Affintransformation als Hintereinanderausführung folgender elementarer Transformationsschritte vorstellen kann:

1. Skalierung in *y*-Richtung mit Maßstab m_y und in *x*-Richtung mit Maßstab m_x
2. Transvektion (Scherung) mit den Scherwinkeln α, β
3. Translation mit den Translationsparametern Y_0, X_0

Eine andere Reihenfolge der Schritte ergibt wie in Abschnitt 6.3 Parameter mit anderen Werten.

Aufgabe 33: Schreiben Sie die Transformationsgleichungen auf, wenn die Translation am Anfang statt wie oben am Ende steht. Stellen Sie die Beziehung dieser neuen Parameter (y_0,x_0,m_y',m_x',α',β') zu den Parametern (m_y,m_x,α,β,Y_0,X_0) fest.

Die Transformationsgleichungen der Rücktransformation erhält man wiederum, indem man die Transformationsgleichungen der Hintransformation nach (y,x) auflöst. Man erhält dabei die Affintransformation

$$y = y_0 + b_4 \cdot X + b_3 \cdot Y$$
$$x = x_0 + b_1 \cdot X - b_2 \cdot Y$$

mit den Parametern (b_1,b_2,b_3,b_4,y_0,x_0), die sich aus denen der Hintransformation mit

$$d = a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4, \qquad b_3 = a_1/d, \qquad b_4 = -a_4/d, \qquad y_0 = -b_4 X_0 - b_3 Y_0$$
$$b_1 = a_3/d, \qquad b_2 = -a_2/d, \qquad x_0 = -b_1 X_0 + b_2 Y_0$$

ergeben.

Bei drei identischen Punkten kann man die Parameter sehr leicht durch Lösung des Gleichungssystemes finden, welches aus den sechs Transformationsgleichungen besteht. Am besten benutzt man dazu die Parametrisierung (a_1,a_2,a_3,a_4,Y_0,X_0), weil die Transformationsgleichungen linear sind. Später kann man die Parameter nach Wunsch in die Parameter (m_y,m_x,α,β,Y_0,X_0) umrechnen.

Beispiel 25: Zur Entzerrung einer historischen Karte ist eine Affintransformation zweckmäßig. Es wurden die Blattkoordinaten (y,x) von vier Punkten A,B,C,D abgegriffen. Da die Punkte A,B,C heute noch existieren, konnten für diese Punkte Koordinaten (Y,X) in einem aktuellen System ermittelt werden. Wir bestimmen die Koordinaten von D im (Y,X)-System. Ein weiterer Punkt E hat nur Koordinaten im (Y,X)-System. Wir ermitteln seine Position (y,x) auf dem historischen Kartenblatt. Wir bestimmen außerdem Maßstäbe und Scherwinkel bezogen auf die Achsen des Kartenblatts.

Punkt	y [m]	x [m]	Y [m]	X [m]
A	0,142	0,643	161205	171802
B	0,236	0,334	161298	171496
C	0,723	0,456	161783	171617
D	0,945	0,855		
E			161411	171557

Lösung: Wir schreiben die Transformationsgleichungen der identischen Punkte A,B,C zu einem linearen Gleichungssystem zusammen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}142 & 0{,}643 \\ 0 & 1 & 0{,}643 & -0{,}142 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}236 & 0{,}334 \\ 0 & 1 & 0{,}334 & -0{,}236 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}723 & 0{,}456 \\ 0 & 1 & 0{,}456 & -0{,}723 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ X_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161205 \\ 171802 \\ 161298 \\ 171496 \\ 161783 \\ 171617 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet

Y_0=161062,5; X_0=171165,1; a_1=990,398; a_2=-0,351958; a_3=995,430; a_4=1,846237

Die Anwendung dieser Transformation auf D liefert Y_D=<u>162005 m</u>; X_D=<u>172012 m</u>.

Die Parameter der Rücktransformation sind mit den oben gegebenen Formeln:

y_0=-161,4813; x_0=-172,7671; b_1=0,00100970;
b_2=3,57002·10^{-7}; b_3=0,00100459; b_4=-1,87269·10^{-6}

Die Anwendung dieser Transformation auf E liefert y_E = <u>0,349 m</u>; x_E = <u>0,396 m</u>.

Die gesuchten Maßstäbe und Scherwinkel (im Bogenmaß) sind

$$m_x = \sqrt{990{,}398^2 + 1{,}846237^2} = \underline{990{,}40}; \quad \alpha = \arctan\frac{1{,}846237}{990{,}398} = \underline{0{,}0018641}$$

$$m_y = \sqrt{0{,}351958^2 + 995{,}430^2} = \underline{995{,}43}; \quad \beta = \arctan\frac{-0{,}351958}{995{,}430} = \underline{-0{,}0003536}$$

Probe: Die Transformation der identischen Punkte in beiden Richtungen kontrolliert zunächst die Transformationsparameter. Weiter transformieren wir D(Y_D, X_D) und E(y_E, x_E) mit diesen Parametern ins jeweils andere System zurück. Es werden die gegebenen Koordinaten erhalten.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel25-aufgabe34

Aufgabe 34: Berechnen Sie diese Aufgabe nochmals als Helmert-Transformation. Vergleichen Sie Maßstäbe und Winkel. Die Restklaffungen sollen den Blattkoordinaten (y,x) zugeordnet werden, so dass die Koordinaten (Y,X) im aktuellen System als exakte (fehlerfreie) Größen gelten.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel25-aufgabe34

Sind mehr als drei identische Punkte gegeben und erfüllen deren Koordinaten die Voraussetzungen für das Rechenschema der ebenen Helmert-Transformation, dann kann man die Parameter durch ein ähnlich einfaches Rechenschema ermitteln [G&J 8.1.4]. Sonst liefert das Rechenschema nur eine Näerungslösung, die für manche praktische Zwecke ausreichen könnte, andernfalls muss die Bestimmung der

Parameter mit den Mitteln der Ausgleichungsrechnung erfolgen. Im Allgemeinen ergeben sich wieder Restklaffungen.

Aufgabe 35: In Beispiel 25 wurde ein weiterer identischer Punkt F ermittelt:

Punkt	y [m]	x [m]	Y [m]	X [m]
F	0,446	0,183	161507	171346

Lösen Sie nochmals die Beispielaufgabe mit dem Rechenschema aus [G&J 8.1.4].

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-aufgabe35

7 RÄUMLICHE BERECHNUNGEN

7.1 RÄUMLICHE KOORDINATENSYSTEME

Bei räumlichen kartesischen Koordinatensystemen unterscheidet man im Raum zwischen **Links- und Rechtssystemen**. Daumen (X), Zeigefinger (Y) und Mittelfinger (Z) der linken Hand spannen ein Linkssystem auf, dieselben Finger der rechten Hand ein Rechtssystem (↗ Abbildung 39).

Außerdem gibt es im Wesentlichen **geozentrische und topozentrische Systeme**, bei denen der Koordinatenursprung entweder im Geozentrum (Modell des Erdmittelpunktes) oder im Topozentrum (z.B. Mittelpunkt des Aufnahmeinstrumentes) liegt.

Geozentrische Systeme sind in der Geodäsie meist Rechtssysteme und topozentrische Systeme sind meist Linkssysteme.

⚠ *Hier gibt es viele Ausnahmefälle und Sonderregelungen. Man überzeuge sich zunächst von der Art des Koordinatensystems, mit dem man es zu tun hat.*

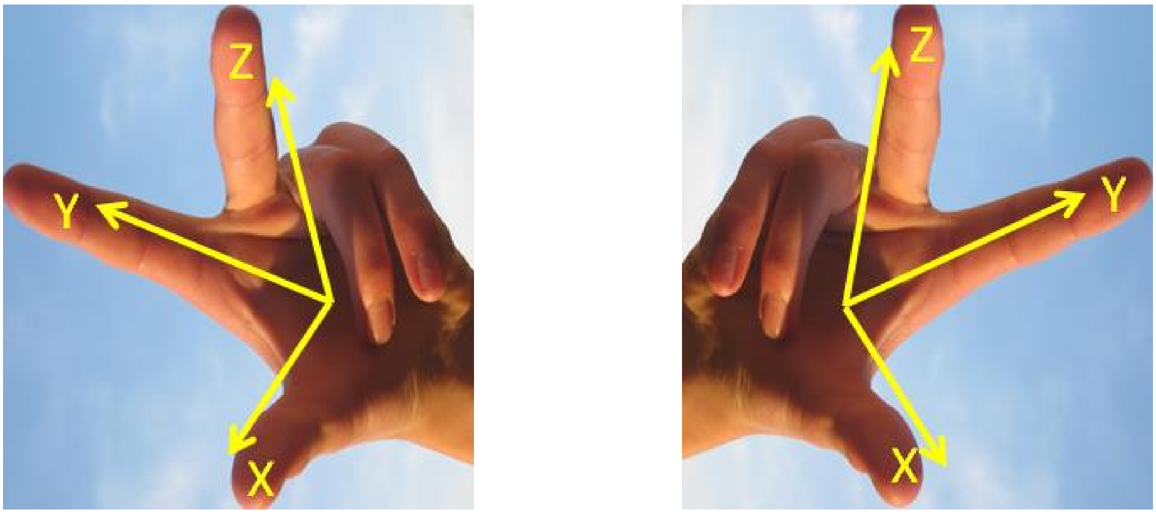


Abbildung 39: Kartesisches Linkssystem (links) und Rechtssystem (rechts)

Tabelle 4 zeigt zwei wichtige räumliche kartesische Koordinatensysteme. Das dort dargestellte topozentrische Linkssystem wird auch verkürzt mit **NEU** (**N**orth-**E**ast-**U**p) gekennzeichnet. Manchmal verwendet man aber auch das topozentrische Rechtssystem **ENU** (**E**ast-**N**orth -**U**p).

Tabelle 4: Zwei räumliche kartesische Koordinatensysteme

	Geozentrisches Rechtssystem	**Topozentrisches Linkssystem**
Koordinaten-ursprung	Modell des Erdmittelpunktes	häufig Mittelpunkt des Aufnahmeinstrumentes
Z-Achse	Modell der Erdrotationsachse, nach Nord (Austrittspunkt: Nordpol)	lokale Lotgerade, zum Zenit (d.h. nach oben)
X-Achse	in der Meridianebene von Greenwich (Austrittspunkt: Golf von Guinea)	lokale Nordrichtung
Y-Achse	ergänzt zum Rechtssystem (Austrittspunkt: östlich von Sumatra)	lokale Ostrichtung

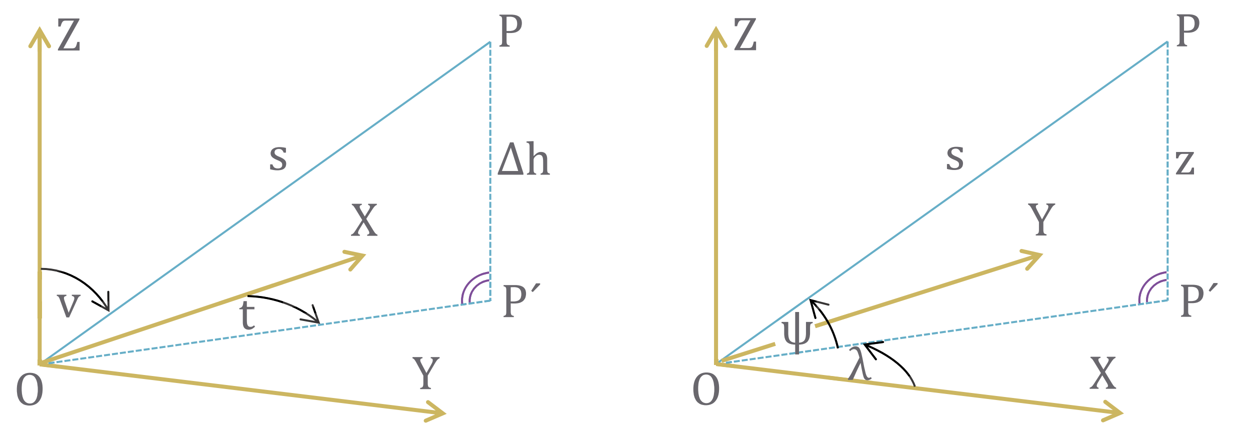


Abbildung 40: Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten im topozentrischen Linkssystem (links) und im geozentrischen Rechtsssystem (rechts)

Auch mit polaren Koordinaten können räumliche Punkte beschrieben werden. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten (↗ Abbildung 40):

1. im topozentrischen Linkssystem
   a. Kugelkoordinaten: Schrägstrecke s, Richtungswinkel t, Zenitwinkel v
   b. Zylinderkoordinaten: mit Höhendifferenz Δh statt v
2. im geozentrischen Rechtsssystem
   a. Kugelkoordinaten: geozentrischer Abstand s, geographische Länge λ, geozentrische Breite ψ
   b. Zylinderkoordinaten (selten): mit z-Koordinate statt ψ
   c. ellipsoidische Koordinaten: geographische Breite φ, geographische Länge λ, ellipsoidische Höhe H (Diese Koordinaten werden im vorliegenden Manuskript nicht weiter besprochen.)

Mit folgenden Formeln können die polaren und kartesischen Koordinaten im topozentrischen Linkssystem ineinander umgerechnet werden:

$x = x_0 + s \cdot \cos t \cdot \sin v$
$y = y_0 + s \cdot \sin t \cdot \sin v$
$z = z_0 + s \cdot \cos v$

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$t = \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$v = \operatorname{arccot} \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Beispiel 26: In einer geneigten Ebene wurden von Tachymeterstandpunkt S aus vier Punkte A,B,C,P gemessen:

Zielpunkt	Hz-Richtung [gon]	Zenitwinkel [gon]	Schrägstrecke [m]
A	0,00	90,68	17,11
B	16,10	95,92	27,45
C	23,06	96,34	29,34
P	43,37	93,35	---

Wir bestimmen die Schrägstrecke AB sowie den Richtungswinkel und den Neigungswinkel von AB. (Die anderen Zielpunkte werden in Aufgabe 36 und Beispiel 27 ff. benutzt.)

Lösung: Wir legen ein topozentrisches kartesisches Linkssystem mit Ursprung im Punkt S und X-Achse in Richtung Teilkreisnull fest. Dann sind die Hz-Richtungen gleichzeitig Richtungswinkel. Dem Punkt S ordnen wir die Koordinaten ($x_S=y_S=z_S=100{,}000$) zu, um negative Koordinaten zu vermeiden. Wir erhalten folgende kartesischen Zielpunktkoordinaten in Meter:

$x_A=100{,}000 + 17{,}11 \cdot \cos(0{,}00) \cdot \sin(90{,}68) \quad = 116{,}927$

$y_A=100{,}000 + 17{,}11 \cdot \sin(0{,}00) \cdot \sin(90{,}68) \quad = 100{,}000$

$z_A=100{,}000 + 17{,}11 \cdot \cos(90{,}68) \quad = 102{,}496$

$x_B=100{,}000 + 27{,}45 \cdot \cos(16{,}10) \cdot \sin(95{,}92) \quad = 126{,}522$

$y_B=100{,}000 + 27{,}45 \cdot \sin(16{,}10) \cdot \sin(95{,}92) \quad = 106{,}854$

$z_B=100{,}000 + 27{,}45 \cdot \cos(95{,}92) \quad = 101{,}758$

Die gesuchten Größen sind nun die Kugelkoordinaten von B vom Ursprung A aus gesehen:

$$s_{AB} = \sqrt{(126{,}522 - 116{,}927)^2 + (106{,}854 - 100{,}000)^2 + (101{,}758 - 102{,}496)^2}$$
$$= \underline{11{,}815 \text{ m}}$$

$$t_{AB} = \arctan\left(\frac{106{,}854 - 100{,}000}{126{,}552 - 116{,}927}\right) = \underline{39{,}488 \text{ gon}}$$

$$v_{AB} = \operatorname{arccot}\frac{101{,}758 - 102{,}496}{\sqrt{(126{,}522 - 116{,}927)^2 + (106{,}854 - 100{,}000)^2}} = \underline{103{,}979 \text{ gon}}$$

Der Neigungswinkel von AB beträgt also -3,979 gon, d.h. von A nach B abfallend.

Aufgabe 36: Bestimmen Sie die Schrägstrecke AC und den Neigungswinkel von AC.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?gber-beispiel26-aufgabe36

7.2 GRUNDELEMENTE DER RÄUMLICHEN GEOMETRIE

Frischen Sie notfalls Ihre Kenntnisse über räumliche Geometrie und Vektorrechnung aus der Mathematik auf.

Mit den Grundformeln der räumlichen Geometrie

Geradengleichung: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \cdot \vec{g}$

Ebenengleichung: $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

finden Sie in Tabelle 5 die wichtigsten Grundoperationen der räumlichen Geometrie zusammengestellt.

Beispiel 27: Wir berechnen mit den Messwerten aus Beispiel 26 den Abstand des Punktes C von der Geraden AB.

Lösung: Mit dem Geradenvektor der Geraden AB

$$\vec{g} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 9{,}595 \\ 6{,}854 \\ -0{,}738 \end{pmatrix}, |\vec{g}| = 11{,}815$$

erhalten wir mit der Formel aus Tabelle 5 den Abstand

$$\sqrt{(\vec{r}_C - \vec{r}_A)^2 - \left(\frac{(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot \vec{g}}{|\vec{g}|}\right)^2} = \sqrt{14{,}761^2 - 14{,}570^2} = \underline{2{,}366 \text{ m}}$$

Beispiel 28: Wir bestimmen mit den Messwerten aus Beispiel 26 die polaren Absteckwerte eines Punktes D von S aus in der Flucht AB, der von A genau 5,000 m in Richtung von B entfernt ist.

Tabelle 5: Grundoperationen der räumlichen Geometrie ($\mathcal{E},\mathcal{E}'$=Ebenen, $\mathcal{G},\mathcal{G}'$=Geraden, $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R}$=Punkte). $\vec{n}$ und $\vec{g}$ können beliebige Längen haben.

$\mathcal{G}$ durch $\mathcal{P},\mathcal{Q}$	$\vec{r}_0 = \vec{r}_\mathcal{P}, \quad \vec{g} = \vec{r}_\mathcal{Q} - \vec{r}_\mathcal{P}$
$\mathcal{E}$ durch $\mathcal{G},\mathcal{P}$	$\vec{n} = (\vec{r}_\mathcal{P} - \vec{r}_0) \times \vec{g}\,, \quad d = \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{P}$
$\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P}$ und $\perp \mathcal{G}$	$\vec{n} = \vec{g}, \quad d = \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{P}$
$\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R}$	$\vec{n} = \left(\vec{r}_\mathcal{Q} - \vec{r}_\mathcal{P}\right) \times \left(\vec{r}_\mathcal{R} - \vec{r}_\mathcal{P}\right), \quad d = \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{P} = \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{Q} = \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{R}$
$\mathcal{E} \parallel \mathcal{E}$ ‘ durch $\mathcal{P}$	$\vec{n} = \vec{n}'\,, \quad d = \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{P}$
Abstand$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$	$\lvert\vec{r}_\mathcal{Q} - \vec{r}_\mathcal{P}\rvert$ („Räumlicher Pythagoras“)
Abstand$(\mathcal{P},\mathcal{G})$	$\sqrt{(\vec{r}_\mathcal{P} - \vec{r}_0)^2 - \left(\frac{(\vec{r}_\mathcal{P} - \vec{r}_0)\cdot\vec{g}}{\lvert\vec{g}\rvert}\right)^2}$
Abstand$(\mathcal{P},\mathcal{E})$	$\lvert\vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{P} - d\rvert/\lvert\vec{n}\rvert$
Schnitt$(\mathcal{G},\mathcal{E})$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{d - \vec{n}\cdot\vec{r}_0}{\vec{n}\cdot\vec{g}}\cdot\vec{g}$
Schnitt$(\mathcal{E},\mathcal{E}')$	$\vec{g} = \vec{n}\times\vec{n}', \qquad \vec{r}_0 = N^T(NN^T)^{-1}\begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ n'_x & n'_y & n'_z \end{pmatrix}$
Neigung$(\mathcal{E})$	Neigungswinkel = $\arccos(n_z/\lvert\vec{n}\rvert)$
Falllinie$(\mathcal{E})$	Richtungswinkel = $\arctan(n_y/n_x)$, $\vec{n}$ zeigt nach oben, d.h. $n_z > 0$
Projektion $\mathcal{P} \to \mathcal{E}$	$\vec{r}_\mathcal{Q} = \vec{r}_\mathcal{P} + (d - \vec{n}\cdot\vec{r}_\mathcal{P})\lvert\vec{n}\rvert^{-2}\cdot\vec{n}$
$\mathcal{G}' \perp \mathcal{G}$ und $\mathcal{G}' \parallel \mathcal{E}$	$\vec{g}' = \vec{n}\times\vec{g}$

In einigen Sonderfällen ist keine eindeutige Lösung möglich.

Lösung: D hat die kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + 5\cdot\frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} = \begin{pmatrix} 120{,}988 \\ 102{,}901 \\ 102{,}184 \end{pmatrix}$$

Diese lassen sich mit den Formeln aus Abschnitt 7.1 in Kugelkoordinaten umrechnen:

$$s_{SD} = \sqrt{(x_D - x_S)^2 + (y_D - y_S)^2 + (z_D - z_0)^2}$$

$$= \sqrt{20{,}988^2 + 2{,}901^2 + 2{,}184^2} = \underline{21{,}299\text{ m}}$$

$$t_{SD} = \arctan\frac{y_D - y_S}{x_D - x_S} = \frac{2{,}901}{20{,}988} = \underline{8{,}743 \text{ gon}}$$

$$v_{SD} = \operatorname{arccot}\frac{z_D - z_S}{\sqrt{(x_D - x_S)^2 + (y_D - y_S)^2}} = \frac{2{,}184}{\sqrt{20{,}988^2 + 2{,}901^2}} = \underline{93{,}462 \text{ gon}}$$

Beispiel 29: Wir stellen mit den Messwerten aus Beispiel 26 die Ebenengleichung einer Ebene durch A, B und C auf und berechnen den Neigungswinkel dieser Ebene und den Richtungswinkel der Falllinie.

Lösung: Mit den Formeln aus Tabelle 5 ($\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$)

$$\vec{n} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \begin{pmatrix} 9{,}595 \\ 6{,}854 \\ -0{,}738 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10{,}464 \\ 10{,}380 \\ -0{,}180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}1068 \\ 0{,}0515 \\ 27{,}875 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A = 3108{,}55$$

lautet die Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix} 2{,}1068 \\ 0{,}0515 \\ 27{,}875 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} = 3108{,}55$$

Probe: Wir setzen die Punkte B und C in die Ebenengleichung ein und überprüfen damit, dass B und C in der Ebene liegen:

$$\begin{pmatrix} 2{,}1068 \\ 0{,}0515 \\ 27{,}875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 126{,}522 \\ 106{,}854 \\ 101{,}758 \end{pmatrix} = 3108{,}55 \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 2{,}1068 \\ 0{,}0515 \\ 27{,}875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 127{,}391 \\ 110{,}380 \\ 101{,}686 \end{pmatrix} = 3108{,}55 \checkmark$$

Der Neigungswinkel der Ebene beträgt

$$\arccos\left(\frac{n_z}{|\vec{n}|}\right) = \arccos\left(\frac{27{,}875}{\sqrt{2{,}1068^2 + 0{,}0515^2 + 27{,}875^2}}\right) = \underline{4{,}804 \text{ gon}}$$

Der Richtungswinkel der Falllinie beträgt

$$\arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \arctan\left(\frac{0{,}0515}{2{,}1068}\right) = \underline{1{,}55 \text{ gon}}$$

(Aus $n_y \approx 0$ erkennt man, dass der Normalenvektor $\vec{n}$ fast vollständig in der *xz*-Ebene liegt, weshalb es plausibel ist, dass die Falllinie etwa in Nord-Süd-Richtung verläuft, nach Norden abfallend.)

Beispiel 30: Wir berechnen mit den Messwerten aus Beispiel 26 die Koordinaten des Punktes P in der Ebene ABC.

Lösung: Wir benötigen hier den Schnittpunkt der Geraden SP mit der Ebene aus Beispiel 29. Ein Punkt auf der Geraden SP hat nach den Formeln aus Abschnitt 7.1 die Darstellung

$$x = x_S + s \cdot \cos t_{SP} \cdot \sin v_{SP}$$
$$y = y_S + s \cdot \sin t_{SP} \cdot \sin v_{SP}$$
$$z = z_S + s \cdot \cos v_{SP}$$

und kann als

$$\vec{r} = \vec{r}_S + s \cdot \begin{pmatrix} \cos t_{SP} \cdot \sin v_{SP} \\ \sin t_{SP} \cdot \sin v_{SP} \\ \cos v_{SP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}000 \\ 100{,}000 \\ 100{,}00 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}77255 \\ 0{,}62634 \\ 0{,}10427 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. s erhält die Rolle des Geradenparameters und der Vektor dahinter ist der Geradenvektor $\vec{g}$. Man überzeugt sich leicht, dass hier automatisch $|\vec{g}| = 1$ gilt. Mit der Formel aus Tabelle 5

$$\vec{r}_P = \vec{r}_S + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{r}_S}{\vec{n} \cdot \vec{g}} \cdot \vec{g}$$

und $\vec{n} \cdot \vec{r}_S$=3003,33; $\vec{n} \cdot \vec{g}$=4,56634 erhält man

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 100{,}000 \\ 100{,}000 \\ 100{,}00 \end{pmatrix} + \frac{3108{,}55 - 3003{,}33}{4{,}56634} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}77255 \\ 0{,}62634 \\ 0{,}10427 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117{,}801 \\ 114{,}432 \\ 102{,}402 \end{pmatrix}$$

Probe: Wir setzen P in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix} 2{,}1068 \\ 0{,}0515 \\ 27{,}875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 117{,}801 \\ 14{,}432 \\ 2{,}402 \end{pmatrix} = 3108{,}53 \checkmark$$

7.3 ANWENDUNG: KUGEL DURCH VIER PUNKTE

Eine Grundaufgabe nicht nur der Geodäsie ist es, eine Kugel durch vier gegebene Punkte A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B),C(x_C,y_C,z_C),D(x_D,y_D,z_D) auf der Kugeloberfläche zu konstruieren, d.h. den Mittelpunkt M und den Radius r zu bestimmen. Dabei schließen wir aus, dass A,B,C,D alle in derselben Ebene liegen. Deshalb dürfen auch keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Es gibt eine Vielzahl von Berechnungsmöglichkeiten, von denen wir die folgende skizzieren:

Berechnung:

1. Man berechnet die Mittelpunkte P,Q,R der Strecken AB,BC,CD aus Koordinatenmitteln:
$$\vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B),\ \ \vec{r}_Q = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C),\ \ \vec{r}_R = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_D)$$
2. Man berechnet eine Ebene $\mathcal{E}_P$ durch P, auf der AB senkrecht steht. Mit den Formeln aus Tabelle 5 ($\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P}$ und $\perp \mathcal{G}$) erhält man
$$\vec{n}_P = \vec{g}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A,\quad d_P = \vec{n}_P \cdot \vec{r}_P$$
$\mathcal{E}_P$ enthält alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, also auch M. Wir berechnen genauso eine Ebene $\mathcal{E}_Q$ durch Q, auf der BC senkrecht steht, und eine Ebene $\mathcal{E}_R$ durch R, auf der CD senkrecht steht. Auch diese beiden Ebenen enthalten M.
3. Schließlich muss man nur noch die Ebenen $\mathcal{E}_P, \mathcal{E}_Q, \mathcal{E}_R$ schneiden. Wenn die oben genannten Sonderfälle ausgeschlossen wurden, gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt. Da der Kugelmittelpunkt M in allen drei Ebenen liegt, kann dieser Schnittpunkt nur M sein. Praktisch berechnet man M
   a. entweder mit den Formeln aus Tabelle 5, z.B. zuerst $\mathcal{G}$ = Schnitt($\mathcal{E}_P, \mathcal{E}_Q$) und dann M=Schnitt($\mathcal{G}, \mathcal{E}_R$),
   b. oder als Lösung des linearen Systems der drei Ebenengleichungen.
4. Man berechnet aus Koordinaten die Abstände MA,MB,MC und MD. **Probe**: Diese Abstände müssen alle drei gleich sein und ergeben den gesuchten Radius *r*.

Aufgabe 37: In einem kugelförmigen Kuppelgewölbe wurden von Tachymeterstandpunkt S aus vier Punkte A,B,C,D gemessen:

Zielpunkt	Hz-Richtung [gon]	Zenitwinkel [gon]	Schrägstrecke [m]
A	0,00	77,30	17,11
B	175,89	95,92	16,10
C	240,00	71,34	23,06
D	311,82	93,35	14,02

Der höchste Punkt Z auf der Kugeloberfläche soll abgesteckt werden. Berechnen Sie hierfür die polaren Absteckwerte (Hz-Richtung, Zenitwinkel, Schrägstrecke) von S aus.

8 LÖSUNGEN

Zwischenergebnisse wurden sinnvoll gerundet, so können unbedeutende Abweichungen zur exakten Lösung entstehen.

Aufgabe 2: Von den 19 Kombinationen sind 6 Kombinationen vom Typ SSW. Bei drei von ihnen liegt der gegebene Winkel der kürzeren Seite gegenüber, wonach die Lösung zweideutig ist, z.B.

$a = 14{,}02$ m $\qquad b = 17{,}11$ m $\qquad \alpha = 41{,}413$ m

Hiernach ist sowohl $\beta = 52{,}947$ gon als auch $\beta = 147{,}053$ gon möglich.

Aufgabe 3: CD = 59,19 m.

Aufgabe 4: Die Strecken sind 203,94 m; 163,78 m; 225,08 m. Die Richtungswinkel sind 139,805 gon; 22,679 gon; 290,309 gon. Die neuen Koordinaten sind (464,81 m; 136,12 m); (613,74 m; 204,27 m).

Aufgabe 5: Betrachten wir als Beispiel den Fall

$a = 14{,}02$ m $\qquad b = 17{,}11$ m $\qquad \alpha = 41{,}413$ gon

Für $\beta = 52{,}947$ gon erhielte man

$$F = \frac{14{,}02^2\ \mathrm{m}^2}{2(\cot(52{,}947\ \mathrm{gon}) - \cot(41{,}413\ \mathrm{gon} + 52{,}947\ \mathrm{gon}))} = 119{,}47\mathrm{m}^2$$

oder mit $\beta = 147{,}053$ gon ergäbe sich $F = 21{,}61\mathrm{m}^2$. Alternativ könnte man auch

$$F = \frac{1}{2} 14{,}02\ \mathrm{m} \cdot 17{,}11\ \mathrm{m} \cdot \sin(41{,}413\ \mathrm{gon} + 52{,}947\ \mathrm{gon}) = 119{,}47\ \mathrm{m}^2$$

berechnen und das entsprechende für $\beta = 147{,}053$ gon.

Aufgabe 6: $F_{ABCD} = 2141{,}817\ \mathrm{m}^2$

Aufgabe 7: Lösungsidee: Eine Parallele zu einer schrägen Seite durch einen Eckpunkt zerlegt das Trapez in ein Dreieck und ein Parallelogramm.

Aufgabe 9: $F_{ABC} = F_{AB'C'} = 16100{,}6\ \mathrm{m}^2$

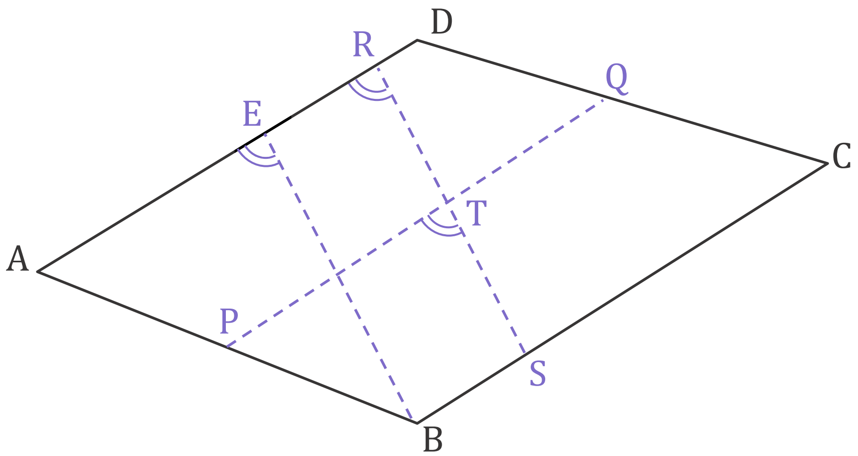
Aufgabe 10: Die Dreiecke ABC und APQ sind geometrisch ähnlich. Stehen ihre Seiten im Verhältnis x, so stehen ihre Flächeninhalte im Verhältnis x^2. Laut Aufgabe soll $x^2 =$ 2:1 sein. Somit ist $x = 1{,}414$ und AP = AB/1,414 und AQ = AC/1,414.
Die Teildreiecke ABR und BCR haben dieselbe Höhe. Sie haben dieselben

Flächeninhalte, wenn sie auch gleichlange Grundseiten AR = RC haben. Der Punkt R muss AC also halbieren.

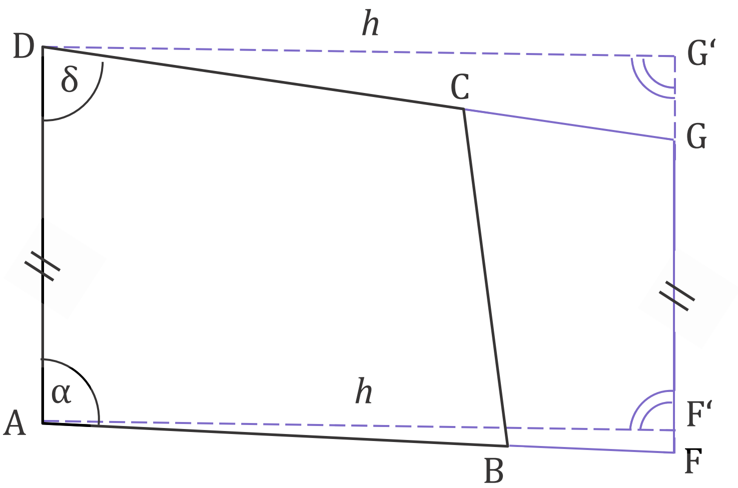
Aufgabe 11: $F_{ABCD} = 1648{,}406\ m^2$

Parallelteilung: PQ = 52,628 m; RT = 16,276 m; AP = 22,224 m; DQ = 25,104 m. Probe über die Berechnung des Flächeninhalts von Viereck BCQP.

Senkrechtteilung: BE = 32,853 m; AE = 30,547 m; $F_{ABE} = 501{,}776\ m^2$; $F_{BERS} = 322{,}427\ m^2$; RS = 32,317 m; ER = 9,895 m; AR = 40,442 m. Probe über die Berechnung des Flächeninhalts von Viereck CDRS.



Aufgabe 12: Beachten Sie, dass AF'G'D ein Rechteck ist.



Aufgabe 13: 6267 km. Hinweis: Geben Sie für das Ergebnis nicht noch mehr Ziffern an, denn die Eingangsgrößen sind eigentlich schon für diese Angabe zu unsicher.

Aufgabe 14: Radius 7,51 m; Bogenlänge 7,25 m; Ordinatenwerte 0,43 m; 0,71 m; 0,84 m; 0,84 m; 0,70 m; 0,42 m.

Aufgabe 15: Trotz flachem Bogen ergeben sich in den Sehnenlängen Abweichungen bis 0,04 m:

a) r = 4959,27 m; s_1 = 391,84 m; s_2 = 337,44 m; s_3 = 272,38 m; s_4 = 185,79 m;
b) r = 4961,70 m; s_1 = 391,86 m; s_2 = 337,47 m; s_3 = 272,42 m; s_4 = 185,82 m;

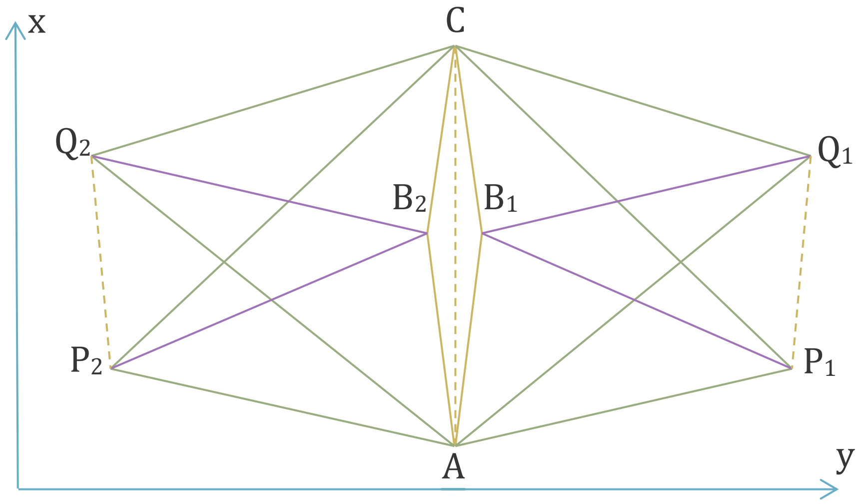
Aufgabe 16: ω_5 = (19,303 gon+25,738 gon)/2 = 22,520 gon; φ_5 = 11,260 gon; e_5 = 30,292 m

Aufgabe 17: $F_1P+F_2P=2a$

Aufgabe 19: Ca. 43 km.

Aufgabe 20: 111238,681 m

Aufgabe 21: Ein lokales Koordinatensystem wird angelegt, z.B. mit der x-Achse parallel zu AC so, dass A(100,000;100,000), C(100,000; 123,060) wird. Zwei Bogenschnitte liefern P_1(116,100;107,086) und Q_1(117,110;119,630). Der jeweils andere Schnittpunkt P_2 bzw. Q_2 liegt symmetrisch dazu auf der anderen Seite von AC. Ein dritter Bogenschnitt von P_1 und Q_1 aus liefert B_1(100,819;114,018). Der andere Schnittpunkt braucht nicht berechnet zu werden, denn er liegt nicht näherungsweise in der Vertikalebene durch AC. B_1 liegt also von P_1 aus gesehen 0,82 m vor der Vertikalebene durch AC.
Ein dritter Bogenschnitt von P_2 und Q_2 aus liefert einen Schnittpunkt B_2 symmetrisch zu B_1 bezüglich der Symmetrieachse AC. Deshalb liegt B_2 von P_2 aus gesehen genauso 0,82 m vor der Vertikalebene durch AC. Das Ergebnis ist also eindeutig.



Aufgabe 22: t_{AB} = 33,770 gon; t_{CD} = 372,451 gon; y_N = 21,62 m; x_N = 19,49 m

Aufgabe 23: Kreisgleichung mit eingesetzter Geradengleichung $(4728+\tau\cdot(4884-4728)-4823)^2+(537+\tau\cdot(566-537)-606)^2=90^2$, umgeformt $\tau^2-1.336220\cdot\tau+0.225841=0$. Lösungen τ_1=1.137716 und τ_2=0.198504. Nur die zweite Lösung liegt zwischen Start und Ziel ($0<\tau_1<1$), ist also eindeutig: N_{Nord} = 4759 km, N_{Ost} = 543 km.

Aufgabe 24: Liegt N auf dem gefährlichen Kreis, sind die Hilfspunkte C und D identisch und t_{CD} kann nicht berechnet werden. (Durch Rundungsfehler könnte man allerdings trotzdem ein Ergebnis erhalten, das falsch ist.)

Aufgabe 25: Mit Rückwärtsschnitten entsprechend Beispiel 19 erhält man y_Q = 449,097 m; x_Q =339,836 und y_R = 315,471 m; x_R = 322,576 m. In der Probe werden die Richtungssätze orientiert und damit die Richtungswinkel t_{PN} = 216,820 gon; t_{QN} = 207,539 gon und t_{RN} = 169,611 gon erhalten. Den Punkt N erhält man durch einen Vorwärtsschnitt von zwei Punkten, am besten von P und R aus: y_N = 422,441 m; x_N = 115.770 m. Der Vorwärtsschnitt von Q und R aus ergibt y_N = 422,439 m ✓; x_N = 115,774 m ✓. Diese Probe ist keine reine Rechenprobe, sondern deckt gleichzeitig Messabweichungen auf. (Der Vorwärtsschnitt von P und Q aus ist ungünstig, weil die zu schneidenden Strahlen nahezu parallel verlaufen.)

Aufgabe 26: P_1(3,43;25,89); P_2(9,51;24,51); P_3(6,99;13,19); P_4(0,91;14,54)

Aufgabe 28: Wir berechnen alle Winkel im Bogenmaß. T_P=0,714624; E_P=27,108. Mit Haupt- und Nebenwert ergeben sich α_1=1.2582; α_2=0.1711; β_1=0.1610; β_2=4.4098. Unbedingt muss überprüft werden, ob die gefundenen Winkel den identischen Punkt P wie gewünscht transformieren. Nur für die Kombinationen α_1,β_2 und α_2,β_1 ist diese Probe erfüllt. Weder die Scherung mit -α_1,-β_2, noch mit -α_2,-β_1 überführt P vom Ziel- ins Startsystem zurück.

Aufgabe 29: Mit einer Translation verschiebt man den Punkt A in den Koordinatenursprung. Dann führt man die Rotation um 50 gon aus und verschiebt den Punkt A wieder zurück an die vorherige Position. Die mittransformierten Punkte B und C gelangen an die Positionen B‘ und C‘.

Aufgabe 31: m=0,999832; ε=0,660315652; a=0,789666; o=0,613263; y_D=-36,421; x_D=18,275; e_{CD}=51,352 m. Schließlich ergibt sich e_{CD}/m=51,360 m. Die Probe sollte über Spannmaß AC erfolgen.

Aufgabe 32: ↗ Aufgabe 26

Aufgabe 33: Die neuen Transformationsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} Y &= \sin\alpha' \cdot m_1' \cdot (x + x_0) \;+\; \cos\beta' \cdot m_2' \cdot (y + y_0) \\ X &= \cos\alpha' \cdot m_1' \cdot (x + x_0) - \;\sin\beta' \cdot m_2' \cdot (y + y_0). \end{aligned}$$

Aus der Umformung

$$\begin{aligned} Y &= (\sin\alpha' \cdot m_1' \cdot x_0 \;+\; \cos\beta' \cdot m_2' \cdot y_0) + \sin\alpha' \cdot m_1' \cdot x \;+\; \cos\beta' \cdot m_2' \cdot y \\ X &= (\cos\alpha' \cdot m_1' \cdot x_0 - \;\sin\beta' \cdot m_2' \cdot y_0) + \cos\alpha' \cdot m_1' \cdot x \;-\; \sin\beta' \cdot m_2' \cdot y \end{aligned}$$

liest man die Beziehungen der Parameter ab:

$$Y_0 = \sin\alpha' \cdot m_1' \cdot x_0 \; + \; \cos\beta' \cdot m_2' \cdot y_0$$

$$X_0 = \cos\alpha' \cdot m_1' \cdot x_0 - \; \sin\beta' \cdot m_2' \cdot y_0$$

$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', m_1 = \; m_1', m_2 = \; m_2'$$

Aufgabe 34: Das Blattsystem (y,x) muss jetzt das Zielsystem sein. Beachten Sie, dass also (y,x) und (Y,X) jetzt vertauscht sind. Man erhält für die Hintransformation m=0,00100584 und ε=0,000456 sowie y_D=-162,083 m und x_D=-172,088 m. Der transformierte Punkt E behält mit y_E=0,349 m und x_E=0.396 m seine Position aus Beispiel 25 bei. Die Rücktransformation ergibt Y_D=162003 m und X_D=172014 m. D weicht um 3 m von seiner Position aus Beispiel 25 ab. Maßstab und Drehwinkel der Rücktransformation liegen in der Größenordnung der Maßstäbe und Scherwinkel (≈0) aus Beispiel 25.

Aufgabe 35: Die neuen Transformationsparameter (Y,X)→(y,x) sind y_0=-161,5701; x_0=-172,5720; a_1=0,00100863; a_2=0,4308·10^{-6}; a_3=0,00100462; a_4=-1,3875·10^{-6}. Die Anwendung dieser Transformation auf E liefert y_E=0,349 m; x_E=0,396 m. Die Parameter der Rücktransformation (y,x)→(Y,X) sind Y_0=161062,7; X_0=171164,5; b_1=991,446; b_2=-0,4251; b_3=995,397; b_4=1,369. Die Anwendung dieser Transformation auf D liefert Y_D=162005 m und X_D=172013 m.

Aufgabe 36: 14,761 m und -3,495 gon

Aufgabe 37: M(98,15 m; 100,28 m; 115,32 m) und r = 20,18 m; Z(98,15 m; 100,28 m; 135,50 m); t_{SZ} = 190,34 gon; v_{SZ} = 3,35 gon; s_{SZ} = 35,55 m